МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 1

КРАСНОАРМЕЙСКОГО РАЙОНА

Ст. Полтавская

методическая разработка

Комплекс типовых заданий тестовой части

для подготовки к ЕГЭ по математике

«Задачи-ловушки на ЕГЭ по математике»

Для учащихся 10-11 классов

Разработала учитель математике Бородина М.Б.

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ

Методическая разработка «Задачи-ловушки» предназначена для учащихся 10-11 классов. Разработана в соответствии с ФГОС, с учебным планом и программой курса "Математика". Содержит задачи и упражнения, выполнение которых позволит получить системные знания по дисциплине.

Практическое занятие - целенаправленная форма организации педагогического процесса, направленная на углубление теоретических знаний и овладение определенными методами работы, в процессе которых вырабатываются умения и навыки выполнения тех или иных учебных действий в данной сфере науки. Практические занятия играют исключительно важную роль в выработке у учащихся навыков применения полученных знаний для решения практических задач в процессе совместной деятельности с учителем. Практические занятия служат своеобразной формой осуществления связи теории с практикой. Структура практических занятий в основном одинакова — вступление учителя, вопросы учеников по материалу, который требует дополнительных разъяснений. В структуре практического занятия доминирует самостоятельная работа учеников. Правильно организованные практические занятия имеют важное воспитательное и практическое значение и ориентированы на решение следующих задач: углубление, закрепление и конкретизацию знаний, полученных на лекциях и в процессе самостоятельной работы; формирование практических умений и навыков, необходимых в будущей профессиональной деятельности; развитие самостоятельности и т.д.

Методическая разработка «Задачи-ловушки» - это комплекс типовых заданий тестовой части ЕГЭ по математике и заданий для самоконтроля, проверки знаний, включает в себя задания для практической работы по следующим темам: простейшие уравнения, начала теории вероятностей, планиметрия, вычисления и преобразования, стереометрия, производная и первообразная, задачи с прикладным содержанием, текстовые задачи, графики функций, вероятности сложных событий, наибольшее и наименьшее значение функций, словарный материал. Эти разделы предназначены для стимулирования интереса к изучаемому материалу и помогают лучше организовать работу как самостоятельную, так и индивидуальную. Это дает возможность учителю избавить детей от преодоления трудностей и полнее выявить знания учащихся по определенной теме.

Дидактический материал содержит ответы на интересующие вопросы, в котором рассматриваются задачи-ловушки встречающиеся в ЕГЭ по математике, в которых излагаются трудно осваиваемые примеры, задачи, уравнения и можно ознакомиться с разными способами их решения.

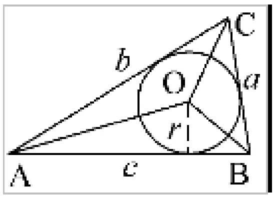
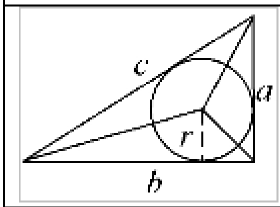
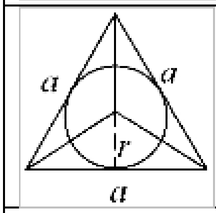
На основе большого практического материала дается возможность отслеживать материал в ходе его изучения, закрепляя. Это позволяет учителю управлять учебным процессом, вносить в него коррективы, сделать обучение математики дифференцированным, а иногда и индивидуальным. Именно поэтому в состав самостоятельных работ включены задания различных видов, проверяющие уровень сформированности умений и навыков по выполнению вычислений.

Актуальность разработки дидактического материала не требует дополнительных доказательств, т.к. в работе приведено достаточное количество заданий, способствующих выработке навыков, умений и знаний и самоконтроля.

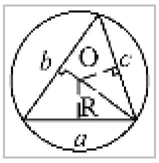
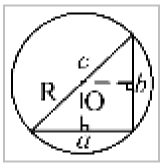
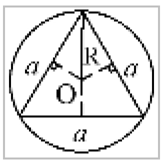
Практическая значимость данного дидактического материала заключается в том, что материал дает возможность учителю повышая плотность урока, систематически отслеживать динамику усвоения учащимися материла основных тем, делает процесс закрепления более осознанным и интересным, а это повышает интерес к математике и делает его более привлекательным. Предлагается ряд задач практико-ориентированного содержания. Идёт выработка навыков решения определенных видов задач, отработка и применение алгоритмов для некоторых видов задач повышенной трудности. Основными критериями эффективности методической разработки, кроме результативных показателей (уровня педагогического мастерства, активности учителя и др.), являются характеристики самого методического процесса: системность, самообразование, наставничество, консультирование, этапность.

СЛОВАРНЫЙ МАТЕРИАЛ

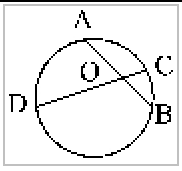
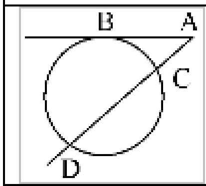
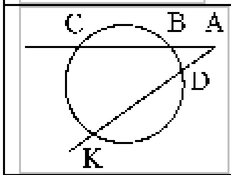
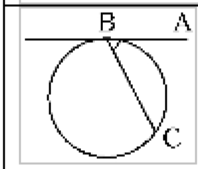
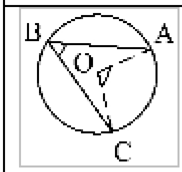
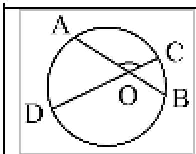
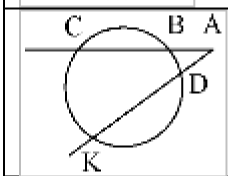
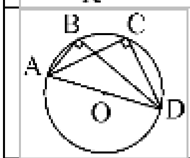
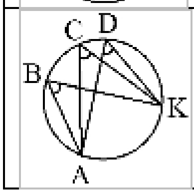
1. **1.Вписанная окружность – ее центр и радиус.**

	O – точка пересечения биссектрис углов ΔABC, r – радиус вписанной окружности, S – площадь ΔABC $r = \frac{2S}{a+b+c}$ - для любого Δ	Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника.
	$r = \frac{a+b-c}{2}$ - - для прямоугольного Δ, где c - гипотенуза	Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника.
	$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ - - для правильного Δ, где a - сторона	Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника, медиан и высот.

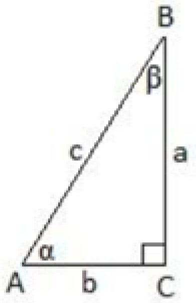
2. Описанная окружность – ее центр и радиус.

	O – точка пересечения серединных перпендикуляров, R – радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$ - для любого Δ, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	Центр описанной окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров
	$R = \frac{c}{2}$ - для прямоугольного Δ, где с – гипотенуза	Центр описанной окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров, делит гипотенузу пополам.
	$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ - для правильного Δ, где a - сторона	Центр описанной окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан.

3.Окружность. Касательные. Секущие. Хорды. Углы.

	$AO \cdot OB = CO \cdot OD$, где O – точка пересечения хорд AB и CD	Произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды относительно точки их пересечения.
	$AB^2 = AC \cdot AD$, где AB – касательная, B – точка касания	Произведение отрезка секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенных к окружности из одной точки.
	$AB \cdot AC = AD \cdot AK$, где AC и AK - секущие	Произведение отрезка секущей на ее внешнюю часть есть величина постоянная.
	AB – касательная, BC – хорда $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC}$	Угол, образованный касательной и хордой, проведенных к окружности из одной точки, измеряется половиной дуги, заключенной внутри сторон этого угла.
	$\angle ABC$ - вписанный угол, $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} = \frac{1}{2}\angle AOC$	Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается и равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
	AB, CD – хорды $\angle AOC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{DB})$	Угол, вершина которого находится внутри окружности, измеряется полусуммой дуг, заключенных внутри сторон угла.
	AC и AK – секущие, $\angle CAK = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{CK} - \overset{\smile}{BD})$	Угол, образованный двумя секущими, измеряется полуразностью дуг, заключенных внутри сторон этого угла.
	AD – диаметр окружности, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$	Вписанный угол, который опирается на диаметр, равен 90°.
	$\angle ABK = \angle ACK = \angle ADK$	Вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу, равны между собой.

Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника. ($\alpha+\beta=90°$)



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\left(\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}\right)$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\left(\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}\right)$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\left(\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}\right)$

$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$ $\left(\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}\right)$

$\sin\beta = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$; $\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$; $\mathrm{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

Имеем: $\sin\beta = \cos\alpha$; $\cos\beta = \sin\alpha$; $\mathrm{tg}\beta = \mathrm{ctg}\alpha$; $\mathrm{ctg}\beta = \mathrm{tg}\alpha$

Так как $\beta = 90° - \alpha$, то

$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$;

Основные тригонометрические тождества.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$;

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$;

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$; $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$;

$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$; $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Формулы сложения.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$;

$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}$;

$a^0 = 1$

$a^1 - a$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(ab)^x = a^x \cdot b^x$

$\left(\frac{a}{b}\right)^X = \frac{a^X}{b^X}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-X} = \left(\frac{b}{a}\right)^X$

$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a}$

$\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\sqrt{a^2} = |a|$

Четные показатели:

$\sqrt[2\cdot n]{a^{2\cdot n}} = |a|$

Нечетные показатели:

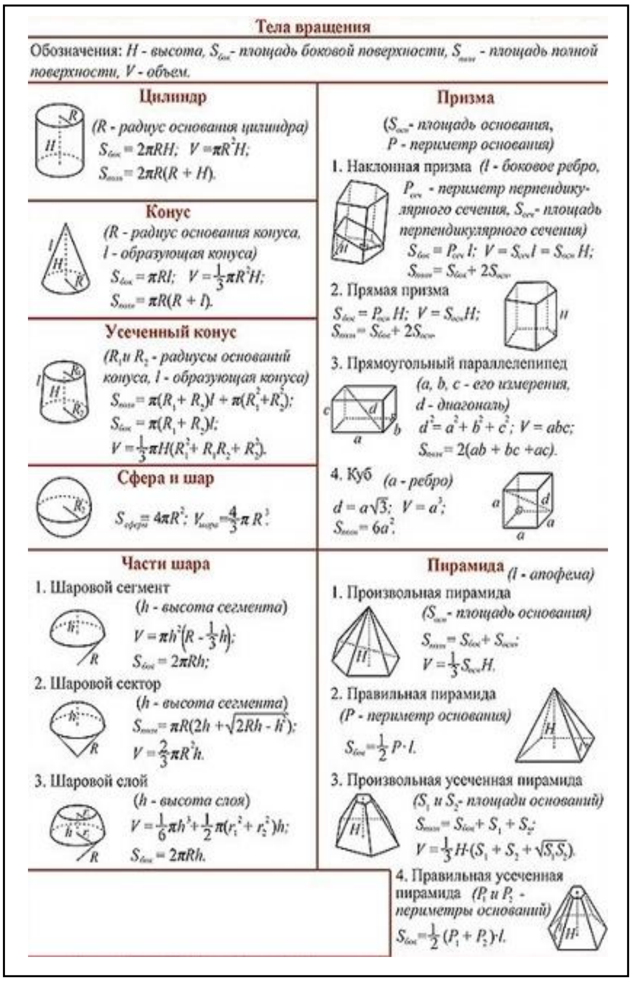
$\sqrt[2n+1]{a^{2\cdot n+1}} = a$

Общие формулы.

$\sin t = a$, $0<a<1$ $t = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$	$\sin t = -a$, $0<a<1$ $t = (-1)^{n+1}\cdot \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$
$\cos t = a$, $0<a<1$ $t = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$	$\cos t = -a$, $0<a<1$ $t = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n$, $n \in Z$
$\mathrm{tg}\, t = a$, $a>0$ $t = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$, $n \in Z$	$\mathrm{tg}\, t = -a$, $a>0$ $t = -\mathrm{arctg}\, a + \pi n$, $n \in Z$
$\mathrm{ctg}\, t = a$, $a>0$ $t = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$, $n \in Z$	$\mathrm{ctg}\, t = -a$, $a>0$ $t = \pi - \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$, $n \in Z$

Частные формулы.

$\sin t = 0$ $t = \pi n$, $n \in Z$	$\sin t = 1$ $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$	$\sin t = -1$ $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$
$\cos t = 0$ $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$	$\cos t = 1$ $t = 2\pi n$, $n \in Z$	$\cos t = -1$ $t = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$



Тела вращения

Обозначения: H - высота, $S_{бок}$ - площадь боковой поверхности, $S_{полн}$ - площадь полной поверхности, V - объем.

Цилиндр

(R - радиус основания цилиндра)

$S_{бок} = 2\pi RH$; $V = \pi R^2 H$;

$S_{полн} = 2\pi R(R + H)$.

Конус

(R - радиус основания конуса, l - образующая конуса)

$S_{бок} = \pi Rl$; $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;

$S_{полн} = \pi R(R + l)$.

Усеченный конус

(R_1 и R_2 - радиусы оснований конуса, l - образующая конуса)

$S_{полн} = \pi(R_1 + R_2)l + \pi(R_1^2 + R_2^2)$;

$S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)l$;

$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$.

Сфера и шар

$S_{сферы} = 4\pi R^2$; $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Части шара

1. Шаровой сегмент (h - высота сегмента)

$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$;

$S_{бок} = 2\pi Rh$;

2. Шаровой сектор (h - высота сегмента)

$S_{полн} = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2})$;

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

3. Шаровой слой (h - высота слоя)

$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h$;

$S_{бок} = 2\pi Rh$.

Призма

($S_{осн}$ - площадь основания, P - периметр основания)

1. Наклонная призма (l - боковое ребро, $P_{сеч}$ - периметр перпендикулярного сечения, $S_{сеч}$ - площадь перпендикулярного сечения)

$S_{бок} = P_{сеч} l$; $V = S_{сеч} l = S_{осн} H$;

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

2. Прямая призма

$S_{бок} = P_{осн} H$; $V = S_{осн} H$;

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

3. Прямоугольный параллелепипед (a, b, c - его измерения, d - диагональ)

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $V = abc$;

$S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$.

4. Куб (a - ребро)

$d = a\sqrt{3}$; $V = a^3$;

$S_{полн} = 6a^2$.

Пирамида (l - апофема)

1. Произвольная пирамида ($S_{осн}$ - площадь основания)

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$;

$V = \frac{1}{3}S_{осн} H$.

2. Правильная пирамида (P - периметр основания)

$S_{бок} = \frac{1}{2}P \cdot l$.

3. Произвольная усеченная пирамида (S_1 и S_2 - площади оснований)

$S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2$;

$V = \frac{1}{3}H \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

4. Правильная усеченная пирамида (P_1 и P_2 - периметры оснований)

$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l$.

Определение:

$log_a b = c$,

если $a^c = b$

$log_a a = 1$

$log_a 1 = 0$

$lg\, x = log_{10} x$

$ln\, x = log_e x$,

где $e \approx 2,7$

Осн. лог. тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

$$b = log_a a^b$$

$$log_a x + log_a y = log_a xy$$

$$log_a x - log_a y = log_a \frac{x}{y}$$

$$log_a x^n = n \cdot log_a x$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

<u>Основные правила дифференцирования</u>

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u'v + u'v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

<u>Производные основных элементарных функций</u>

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

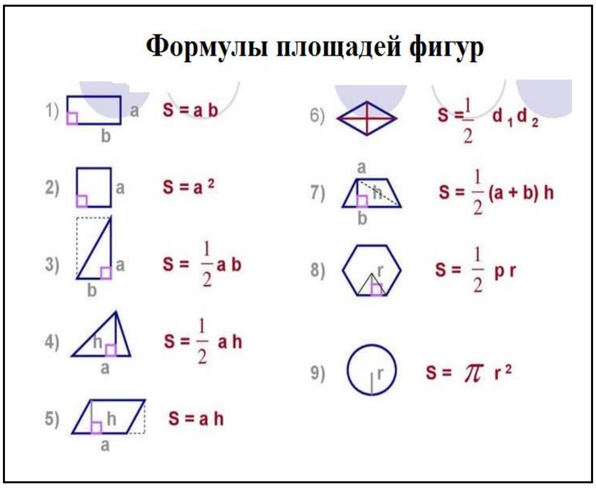
12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$



Формулы площадей фигур

1) $S = a\,b$

2) $S = a^2$

3) $S = \frac{1}{2}a\,b$

4) $S = \frac{1}{2}a\,h$

5) $S = a\,h$

6) $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

7) $S = \frac{1}{2}(a + b)\,h$

8) $S = \frac{1}{2}p\,r$

9) $S = \pi r^2$

1. Простейшие уравнения

1. Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x.$ Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{-72-17x}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}-72-17x=x^2,\\-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+17x+72=0,\\x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-9,\\x=-8,\end{array}\right.\\x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-9,\\x=-8.\end{array}\right.$$

Меньший корень равен −9.

Ответ: −9.

2. Решите уравнение $\sqrt{6+5x}=x.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{6+5x}=x\Leftrightarrow\begin{cases}6+5x=x^2,\\x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x-6=0,\\x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\x=6,\end{array}\right.\\x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=6.$$

Уравнение имеет единственный корень, он и является ответом.

Ответ: 6.

3. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+2}=-2.$

Решение.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$\sqrt[3]{x+2}=-2\Leftrightarrow x+2=-8\Leftrightarrow x=-10.$$

Ответ: −10.

4. Решите уравнение: $\sqrt{\frac{1}{1-5x}}=\frac{1}{6}.$

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{1}{1-5x}}=\frac{1}{6}.\Leftrightarrow\frac{1}{1-5x}=\frac{1}{36}\Leftrightarrow 1-5x=36\Leftrightarrow x=-7.$$

Ответ: −7.

5. Найдите корень уравнения $5^{x-7}=\frac{1}{125}.$

Решение.

Перейдем к одному основанию степени:

$$5^{x-7}=\frac{1}{125}\Leftrightarrow 5^{x-7}=5^{-3}\Leftrightarrow x-7=-3\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

6. Решите уравнение $2^{3+x}=0{,}4\cdot 5^{3+x}$.

Решение.

Перейдем к одному основанию степени:

$$2^{3+x}=0{,}4\cdot 5^{3+x}\Leftrightarrow \frac{2^{3+x}}{5^{3+x}}=0{,}4\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{3+x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{1}\Leftrightarrow 3+x=1\Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: −2.

7. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2\Leftrightarrow 7-x=\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}\Leftrightarrow 7-x=49\Leftrightarrow x=-42.$$

Ответ: −42.

8. Решите уравнение $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$.

Решение.

Заметим, что $1=\log_5 5$ и используем формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$. Имеем:

$$\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1\Leftrightarrow \log_5(7-x)=\log_5(3-x)+\log_5 5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3-x>0,\\ 7-x=5(3-x)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-x>-3,\\ 7-x=15-5x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x<3,\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

9. Решите уравнение $\log_{x-5}49=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Решение.

На ОДЗ перейдем к уравнению на основание логарифма:

$$\log_{x-5}49=2\Leftrightarrow \begin{cases}(x-5)^2=49,\\ x-5>0,\\ x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x-5=\pm 7,\\ x-5>0,\\ x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x-5=7\Leftrightarrow x=12.$$

Итак, на ОДЗ уравнение имеет только один корень.

Ответ: 12.

10. Найдите корень уравнения $\log_{81}3^{2x-6}=2$.

Решение.

Последовательно решаем уравнение:

$$\log_{81}3^{2x-6}=2\Leftrightarrow \frac{2x-6}{4}=2\Leftrightarrow 2x=8+6\Leftrightarrow x=7.$$

Ответ: 7.

11. Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}.$ В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\Leftrightarrow x-7=\pm1+6n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8+6n;\\x=6+6n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Значениям $n\geq0$ соответствуют положительные корни.

Если $n=-1$, то $x=2$ и $x=0.$

Если $n=-2$, то $x=8-12=-4$ и $x=6-12=-6.$

Ответ: −4.

12. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=-1.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=-1\Leftrightarrow\frac{\pi x}{4}=-\frac{\pi}{4}+\pi k\Leftrightarrow x=-1+4k,k\in\mathbb{Z}.$$

Значению $k=0$ соответствует $x=-1.$ Положительным значениям параметра соответствуют положительные значения корней, отрицательным значениям параметра соответствуют меньшие значения корней. Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число −1.

Ответ: −1.

13. Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3}=0,5.$ В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\sin\frac{\pi x}{3}=0,5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\\\frac{\pi x}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}+6k;\\x=\frac{5}{2}+6k,k\in Z.\end{array}\right.$$

Значениям $k\leq-1$ соответствуют отрицательные корни.

Если $k=0$, то $x=0,5$ и $x=2,5.$ Если $k=1$, то $x=6,5$ и $x=8,5.$

Значениям $k\geq2$ соответствуют большие положительные корни.

Наименьшим положительным решением является 0,5.

Ответ: 0,5.

Проверь себя:

1. Найдите корень уравнения $(x-10)^2=(x+4)^2.$

Ответ: 3

Найдите корень уравнения: $\frac{1}{2x-10}=5.$

Ответ: 5,1

Примечание.

Решая уравнения, делайте проверку.

Подставляя число 6, получаем верное равенство $\sqrt{6+5\cdot6}=6$, поэтому число 6 является корнем. Подставляя число −1, получаем неверное равенство $\sqrt{6+5\cdot(-1)}=-1$, поэтому число −1 не является корнем.

2. Начала теории вероятностей

1. Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Решение. В среднем без дефектов выпускают 92 сумки из каждых 100, поэтому искомая вероятность равна 0,92.

Ответ: 0,92.

2.Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

По условию из любых $100+8=108$ сумок в среднем 100 качественных сумок. Значит, вероятность того, что купленная сумка окажется качественной, равна

$$\frac{100}{108}=0,925925\ldots\approx 0,93.$$

Ответ: 0,93.

3. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение. Общее количество выступающих на фестивале групп для ответа на вопрос неважно. Сколько бы их ни было, для указанных стран есть 6 способов взаимного расположения среди выступающих (Д — Дания, Ш — Швеция, Н — Норвегия):

...Д...Ш...Н..., ...Д...Н...Ш..., ...Ш...Н...Д..., ...Ш...Д...Н..., ...Н...Д...Ш..., ...Н...Ш...Д..

Дания находится после Швеции и Норвегии в двух случаях. Поэтому вероятность того, что группы случайным образом будут распределены именно так, равна

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0,33.$$

Ответ: 0,33.

4. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение. Из 5000 тысяч новорожденных 5000 − 2512 = 2488 девочек. Поэтому частота рождения девочек равна

$$\frac{2488}{5000}=0,4976\approx 0,498.$$

Ответ: 0,498.

5. На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

Решение. В самолете $12+18=30$ мест удобны пассажиру В., а всего в самолете 300 мест. Поэтому вероятность того, что пассажиру В. достанется удобное место равна 30 : 300 = 0,1.

Ответ: 0,1.

6. В классе 26 учащихся, среди них два друга — Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение. Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников. Вероятность того, что второй друг окажется среди этих 12 человек, равна 12 : 25 = 0,48.

О т в е т: 0,48.

7. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Решение. Пусть первой за стол сядет девочка, рядом с ней есть два места, на каждое из которых может сесть 8 человек, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что девочки будут сидеть рядом равна $\frac{2}{8}=0,25.$

О т в е т: 0,25.

8. За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

Решение. Пусть первой за стол сядет девочка, тогда рядом с ней есть два места, на каждое из которых претендует 4 человека, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что девочки будут сидеть рядом равна $2\cdot\frac{1}{4}=0,5$

9. За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между девочками будет сидеть один мальчик.

Решение. Рассмотрим сидящую за столом девочку. За столом есть два места через одно от нее, на каждое из которых претендует 200 человек, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик равна $2\cdot\frac{1}{200}=0,01.$

О т в е т: 0,01

10. Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона», распределились случайным образом по восьми игровым группам — по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

Решение. По результатам первой жеребьевки команда «Барселона» находится в одной из 8 групп. Вероятность того, что команда «Зенит» окажется в той же игровой группе равна одной восьмой.

О т в е т: 0,125.

11. У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

Решение. У Вити в копилке лежит 12 + 6 + 4 + 3 = 25 монет на сумму 12 + 12 + 20 + 30 = 74 рубля. Больше 70 рублей останется, если достать из копилки либо рублёвую, либо двухрублёвую монету. Таких монет 12 + 6 = 18. Искомая вероятность равна 18 : 25 = 0,72. О т в е т: 0,72.

12. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

Решение. Обозначим выпадение орла буквой О, а выпадение решки буквой Р. Возможных восемь исходов:

ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР

Из них благоприятными являются ООР, ОРО и РОО. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{3}{8}$, то есть 0,375. (Этот подход затруднителен в случае большого числа бросаний монетки.)

Ответ: 0,375.

13. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. Количество исходов, при которых в результате броска игральных костей выпадет 8 очков, равно 5: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2. Каждый из кубиков может выпасть шестью вариантами, поэтому общее число исходов равно $6\cdot 6 = 36$. Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков, равна

$$\frac{5}{36} = 0,138...$$

Ответ: 0,14.

14. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение. Вероятность того, что команда России окажется во второй группе, равна отношению количества карточек с номером 2, к общему числу карточек. Тем самым, она равна

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25

15**.** На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

Решение. На клавиатуре телефона 10 цифр, из них 5 четных: 0, 2, 4, 6, 8. Поэтому вероятность того, что случайно будет нажата четная цифра, равна 5 : 10 = 0,5.

Ответ: 0,5.

16. Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Решение. Натуральных чисел от 10 до 19 включительно десять, из них на три делятся три числа: 12, 15, 18. Следовательно, искомая вероятность равна 3:10 = 0,3.

Ответ: 0,3.

17. В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Решение. Всего туристов пять, случайным образом из них выбирают двоих. Вероятность быть выбранным равна 2 : 5 = 0,4.

Ответ: 0,4.

18. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Решение. Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0». Тогда благоприятных комбинаций три: 110, 101, 011, а всего комбинаций $2^3 = 8$: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Тем самым, искомая вероятность равна:

$$\frac{3}{8} = 0,375.$$

Ответ: 0,375.

19. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «А = сумма очков равна 5»?

Решение. Сумма очков может быть равна 5 в четырех случаях: «3 + 2», «2 + 3», «1 + 4», «4 + 1».

Ответ: 4.

20. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадает орёл, во второй — решка).

Решение. Всего возможных исходов — четыре: орел-орел, орел-решка, решка-орел, решка-решка. Благоприятным является один: орел-решка. Следовательно, искомая вероятность равна 1 : 4 = 0,25.

Ответ: 0,25.

Проверь себя:

1. Перед началом турнира по шахматам участников случайным образом разбивают на пары с помощью жребия. Всего зарегистрировано 46 шахматистов, среди которых 19 спортсменов из Санкт-Петербурга, в том числе и Алексей Журавлёв. Найдите вероятность, что Алексей Журавлёв будет играть с шахматистом из Санкт-Петербурга.

Ответ: 0,4

2. В соревнованиях по лёгкой атлетике участвуют 6 спортсменов из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Словении и 8 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Словении.

Ответ: 0,3

3. В чемпионате по гимнастике участвуют 25 спортсменок: 12 из России, 7 из Украины, остальные — из Белоруссии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Белоруссии.

Ответ: 0,24

4. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает?

Ответ: 0,997

5. В кармане у Миши было четыре конфеты — «Грильяж», «Белочка», «Коровка» и «Ласточка», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Миша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Грильяж».

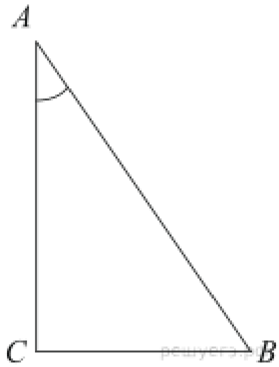
Ответ: 0,25

6. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы две решки.

Ответ: 0,5

3. Планиметрия

Прямоугольный треугольник

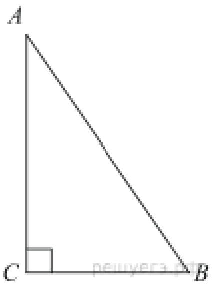


1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 4,8$, $\sin A = \dfrac{7}{25}.$ Найдите AB.

Решение.
Имеем:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{AC}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{4,8}{\sqrt{1-\frac{49}{625}}} = 4,8 \cdot \frac{25}{24} = 5.$$

Ответ: 5.

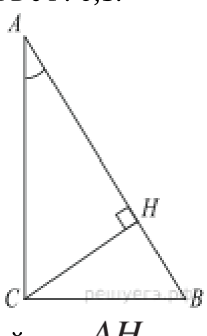


2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \dfrac{\sqrt{17}}{17},$ $BC = 2$. Найдите AC.

Решение.
Имеем:

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} = \frac{BC\cos A}{\sin A} = \frac{BC\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1-\frac{1}{17}}} = 2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

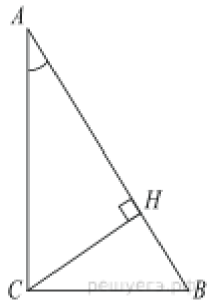


3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{1}{5}.$ Найдите AH.

Решение.
Имеем:

$$AH = AC\cos A = AB\cos^2 A = AB\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A} = 13\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{25}} = 13\cdot\frac{25}{26} = 12,5.$$

Ответ: 12,5.



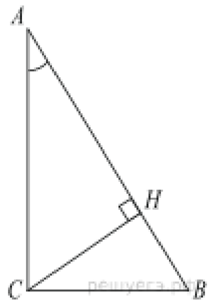
4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = 5$. Найдите BH.

Решение.

Углы A и HCB равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$BH = CB\sin\widehat{HCB} = CB\sin A = AB\sin^2 A = AB(1-\cos^2 A) =$$
$$AB\left(1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A}\right) = 13\left(1-\frac{1}{26}\right) = 12,5.$$

Ответ: 12,5.



5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите высоту CH.

Решение.

Поскольку $CH = AC\sin A$, $AC = AB\cos A$ имеем:

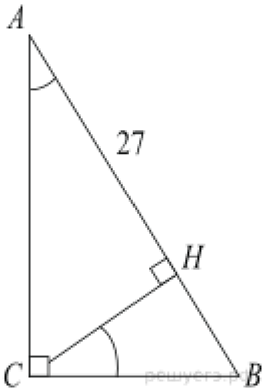
$$CH = AB\sin A\cos A = AB\cdot\frac{\sin A}{\cos A}\cos^2 A = AB\cdot\operatorname{tg}\alpha\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 13\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: 2,5.

Приведем другое решение.

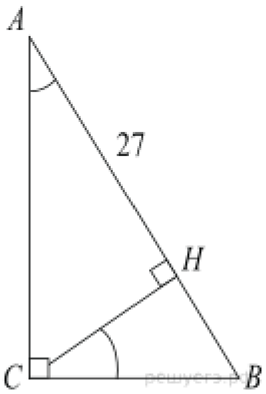
Пусть длина катета BC равна x, тогда длина AC равна $5x$, а длина гипотенузы равна $x\sqrt{26}$. Зная, что гипотенуза равна 13, находим: $x = \frac{13}{\sqrt{26}}$. Поскольку проведенная к гипотенузе высота равна произведению катетов, деленному на гипотенузу, имеем:

$$CH = \frac{CB\cdot CA}{AB} = \frac{5x^2}{x\sqrt{26}} = \frac{5x}{\sqrt{26}} = \frac{5\cdot 13}{26} = \frac{5}{2}.$$



6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 27$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите BH.

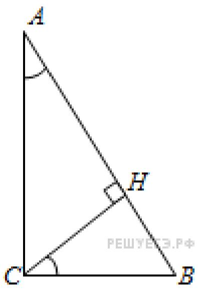
Решение.



Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому из треугольников *BHC* и *BCA* имеем:

$$BH = CH \operatorname{tg} \angle HCB = CH \operatorname{tg} A = AH \operatorname{tg}^2 A = 27 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 12.$$

Ответ: 12.



7. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $BH = 12$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите AH.

Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$AH = \frac{CH}{\operatorname{tg} A} = \frac{HB}{\operatorname{tg}^2 A} = \frac{12 \cdot 9}{4} = 27.$$

Ответ: 27.

.

……
……
…………………………………………………………………………………………………..

11. Наибольшее и наименьшее значение функций

1. Найдите точку минимума функции $y = (3-x)e^{3-x}$.

Решение.

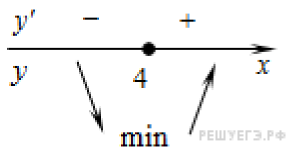
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3-x)'e^{3-x} + (3-x)(e^{3-x})' = -e^{3-x} + (3-x)e^{3-x}(-1) = (x-4)e^{3-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x-4)e^{3-x} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

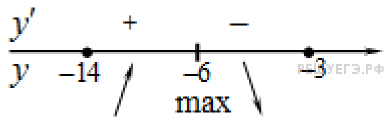
2. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+6)^2(x-10)+8$ на отрезке $[-14;-3]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2(x+6)(x-10) + (x+6)^2 \cdot 1 = (x+6)(2x-20+x+6) = (x+6)(3x-14).$$

Производная обращается в нуль в точках -6 и $\frac{14}{3}$, заданному отрезку принадлежит число -6. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



В точке −6 функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-6) = (-6+6)^2(-6-10)+8 = 8.$$

Ответ: 8.

3.Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$.

Решение.

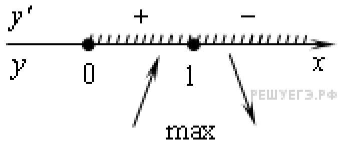
Заметим, что $y = -2x^{\frac{3}{2}} + 3x$ и найдем производную этой функции:

$$y' = -2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 3 = -3\sqrt{x} + 3.$$

Найдем нули производной:

$$-3\sqrt{x}+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Наибольшим значением функции на отрезке [0; 4] является ее значение в точке максимума. Найдем его:

$$y(1)=-2+3=1.$$

Ответ: 1.

1. Найдите наименьшее значение функции $y=3x-\ln(x+3)^3$ на отрезке [−2,5; 0].

Решение.

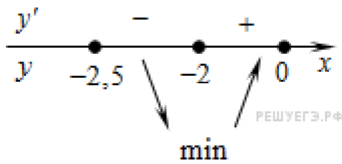
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x)=3-\frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3-\dfrac{3}{x+3}=0, \\ -2,5\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+3}=1, \\ -2,5\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ -2,5\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=-2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2)=-2\cdot 3-\ln 1=-6.$$

Ответ: −6.

11. Найдите точку минимума функции $y=3x-\ln(x+3)^3$.

Решение.

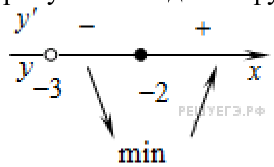
Заметим, что $y=3x-3\ln(x+3)$. Область определения функции — открытый луч $(-3;+\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x)=3-\frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной:

$$3-\frac{3}{x+3}=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

Найденная точка лежит на луче $(-3;+\infty)$. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=-2.$

Ответ: −2.

17. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x}-6e^{x}+3$ на отрезке $[1;2].$

Решение.

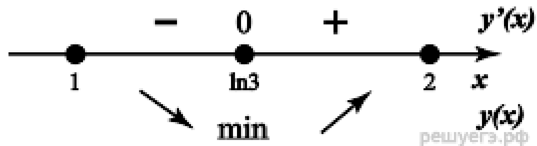
Найдем производную заданной функции:

$$y'=2e^{2x}-6e^{x}=2e^{x}(e^{x}-3).$$

Найдем нули производной:

$$2e^{x}(e^{x}-3)=0\Leftrightarrow e^{x}=3\Leftrightarrow x=\ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его:

$$y(\ln 3)=e^{2\ln 3}-6e^{\ln 3}+3=3^{2}-6\cdot 3+3=-6.$$

Ответ: −6.

1. Найдите наибольшее значение функции $y=12\cos x+6\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\pi+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

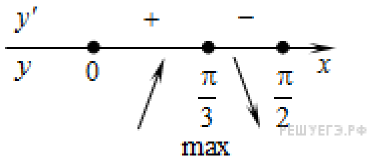
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-12\sin x+6\sqrt{3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases}-12\sin x+6\sqrt{3}=0,\\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = \frac{\pi}{3}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12.$$

Ответ: 12.

10. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin x + \frac{24}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 5\cos x + \frac{24}{\pi}$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{24}{\pi}\frac{5\pi}{6} + 6 = -16{,}5.$$

Ответ: −16,5.

11. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\operatorname{tg}x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 3\operatorname{tg}^2 x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$y(0) = 3\operatorname{tg}0 - 3\cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.

21. Найдите точку максимума функции $y = (2x-3)\cos x - 2\sin x + 5$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2\cos x + (3-2x)\sin x - 2\cos x = (3-2x)\sin x.$$

На заданном промежутке (первая четверть без граничных точек) синус не обращается в нуль и принимает только положительные значения. Поэтому единственный нуль производной — число 1,5.

Определим знаки производной функции: она положительна при $x < 1{,}5$ и отрицательна при $x > 1{,}5$. Поэтому искомая точка максимума — число 1,5.

Ответ: 1,5.

1. Найдите точку минимума функции $y = 7^{x^2+2x+3}$.

Решение.

Поскольку функция $y = 7^x$ возрастающая, заданная функция достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума выражение x^2+2x+3. Квадратный трехчлен $y = ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке −1.

Ответ: −1.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5-4x-x^2}$.

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y = \sqrt{5-4x-x^2} = \sqrt{9-(x+2)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$y = \sqrt{9-(x+2)^2} \le \sqrt{9} = 3.$$

Поэтому наибольшее значение функции достигается в точке −2, и оно равно 3.

Ответ: 3.

Примечание.

Приведем другое решение.

Квадратный трехчлен $y = ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x = -\frac{b}{2a}$. В нашем случае наибольшее значение достигается в точке −2 и равно 9. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ возрастает и определена в точке 9, для исходной функции $y = \sqrt{5-4x-x^2}$ имеем: $y_{\text{нб}} = \sqrt{9} = 3$.

3. Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2+2x-x^2)-2$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y = ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 1. Поскольку функция $y = \log_2 x$ возрастает, и функция $y = \log_2(2+2x-x^2)-2$ определена в точке 1, она также достигает в ней максимума.

Ответ: 1.

Проверь себя:

1.Найдите наименьшее значение функции $y = 66\operatorname{tg} x - 132x + 33\pi + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.
Ответ: 73

2. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 + 28x - 28)e^{-28-x}$ на отрезке $[-33; -23]$.
Ответ: -28

3. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10;\ -1]$.
Ответ: -10

4. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 12x^2 + 15$ на отрезке $[-2; 2]$.
Ответ: 15

5. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2.$
Ответ: 2

6. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке [−4,5; 0].
Ответ: 20

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

А.

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{4}{4-7x}}=0,4.$

Ответ: -3

2. Найдите корни уравнения: $\cos\dfrac{8\pi x}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

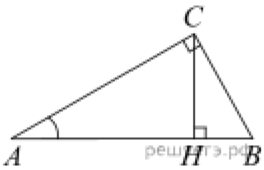
Ответ: -0,125

3. В сборнике билетов по химии всего 50 билетов, в 16 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

Ответ: 0,32

4. Фабрика выпускает сумки. В среднем 14 сумок из 130 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ: 0,89

5. 

В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, $AB=34,\ \mathrm{tg}A=4.$ Найдите *BH*.

Ответ: 32

6. Основания равнобедренной трапеции равны 28 и 15. Тангенс острого угла равен $\dfrac{11}{13}.$ Найдите высоту трапеции.

Ответ: 5,5

7. Найдите $\dfrac{a}{b}$, если $\dfrac{2a+5b}{5a+2b}=1.$

Ответ: 1

8. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}}\cdot\dfrac{16}{a^{-1}b^{-4}}.$

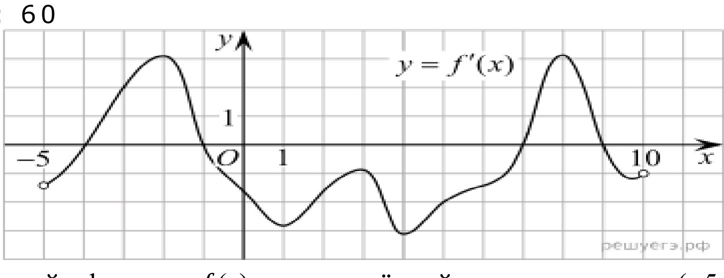
Ответ: 0,25

9. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, боковое ребро равно 12. Найдите объём пирамиды.

Ответ: 324

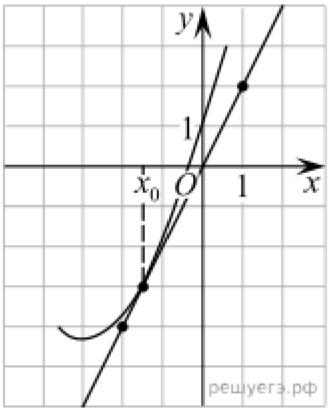
10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка *K* — середина ребра AA_1, точка *L* — середина ребра A_1D_1, точка *M* — середина ребра A_1B_1. Найдите угол MLK. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

11. 

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;10)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ: 3

12. 

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

Ответ: 2

13. Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость *v* меняется по закону $\upsilon = \upsilon_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где *t* — время с момента начала колебаний, *T* = 2 с — период колебаний, $\upsilon_0 = 1,1$ м/с. Кинетическая энергия *E* (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$, где *m* — масса груза в килограммах, *v* — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 32 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: 0,484

14. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 20\ ^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние *x*, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 60\ ^\circ\text{C}$ до температуры $T(^\circ\text{C})$, причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

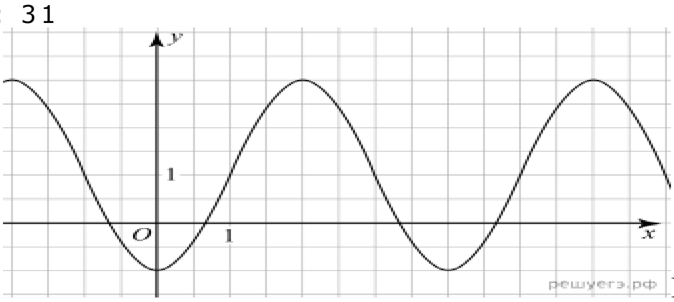
Ответ: 30

15. Ире надо подписать 880 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Ира подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за восьмой день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

Ответ: 52

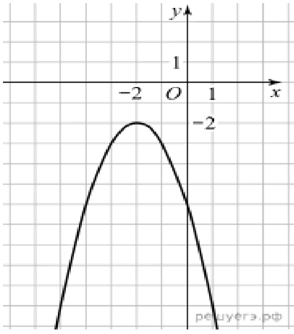
16. На изготовление 837 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 899 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: 31

17. 

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\cos\left(\frac{\pi x}{b} + c\right) + d$, где числа *a, b, c* и *d* — целые. Найдите $f\left(\frac{22}{3}\right)$.

Ответ: 0

18. 

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c,$ где числа a, b и c — целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x) = -4$.

Ответ: 8

19. Какова вероятность того, что в случайно выбранном телефонном номере последняя цифра чётная, а предпоследняя — нечётная?

Ответ: 0,25

20. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

Ответ: 1,05

21. Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7.$

Ответ: 3

22. Найдите точку минимума функции $y = (3 - x)e^{3-x}.$

Ответ: 4

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ №1

Вариант 1

Выполнена: ФИО_________________________________ класс ______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение стартовой работы по математике даётся 180 минут. Работа включает в себя 11 заданий и состоит из двух частей. Ответом в заданиях части 1 (1–8) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями. В заданиях части 2 (9-10) требуется записать решение и ответ в специально отведённом для этого поле. При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором. При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут. Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий.

Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

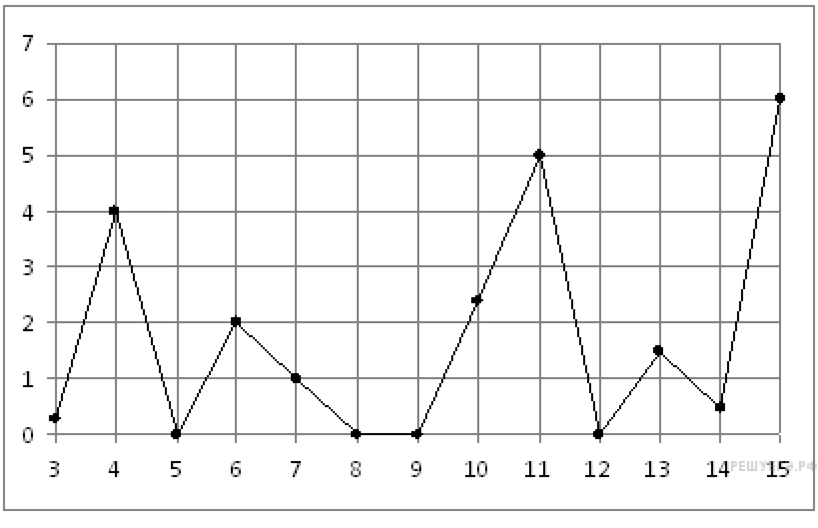
Желаем успеха!

Вариант 1

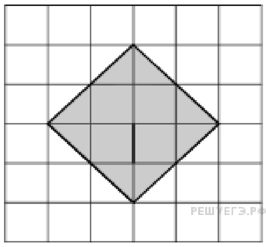
1.Найдите значение выражения $\dfrac{2{,}8\cdot 0{,}3}{0{,}7}$

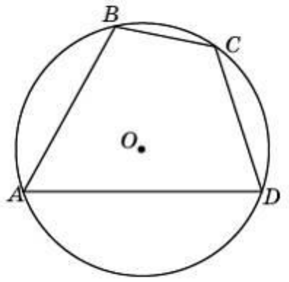
2.Один киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 80 копеек. Счетчик электроэнергии 1 января показывал 46708 киловатт-часов, а 1 февраля показывал 46869 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за январь?

3. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.



4. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1м × 1м. Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.





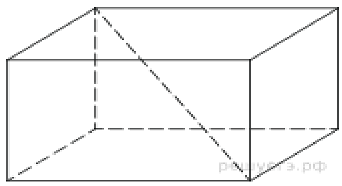
5. Угол A четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 84 градуса. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

6. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно два раза.

7. Решите уравнение $\sqrt{45+4x}=x$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

8. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6.

Найдите объем параллелепипеда.



---

9. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

10. Решите неравенство: $$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0.$$

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ №1

Вариант 2

Выполнена: ФИО___________________________________ класс ______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение стартовой работы по математике даётся 180 минут. Работа включает в себя 11 заданий и состоит из двух частей. Ответом в заданиях части 1 (1–8) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями. В заданиях части 2 (9-10) требуется записать решение и ответ в специально отведённом для этого поле. При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором. При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут. Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий.

Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

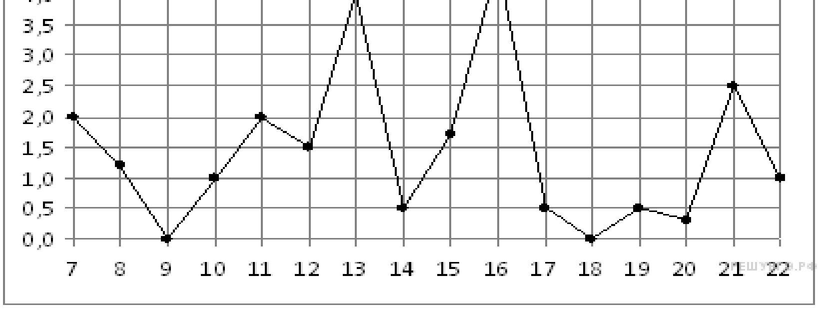
Желаем успеха!

Вариант 2

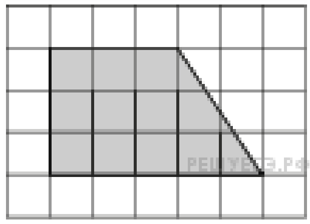
1.Найдите значение выражения $\dfrac{6{,}7-2{,}5}{2{,}4}$.

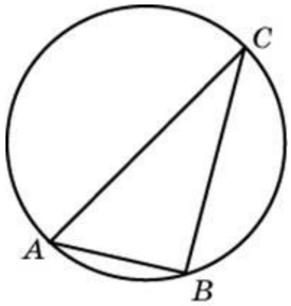
2.Галя отправила SMS-сообщения с новогодними поздравлениями своим 19 друзьям. Стоимость одного SMS-сообщения 1 рубль 60 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Гали было 70 рублей. Сколько рублей останется у Гали после отправки всех сообщений?

3. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало менее 3 миллиметров осадков.



4. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



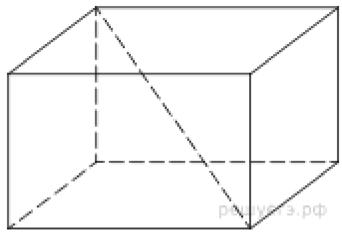


5. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса 3, равен 30 градусов. Найдите сторону AB этого треугольника.

6.Игральную кость с 6 гранями бросают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет равно 6 очков. Результат округлите до сотых.

7. Найдите корень уравнения: $\sqrt{84+5x}=-x$ Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

8. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 3. Объем параллелепипеда равен 36. Найдите его диагональ.



---

9. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

10.Решите неравенство: $\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}-\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\le 0$

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ №2

по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение стартовой работы по математике даётся 60 минут. Работа включает в себя 7 заданий. При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором. При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут. Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий.

Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

Вариант 1

1.Найдите значение выражения $\dfrac{2{,}8\cdot 0{,}3}{0{,}7}$

2. Решите уравнение $\sqrt{45+4x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

3. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2.$

4. Найдите значение выражения: $\sqrt{12}\cos^2\dfrac{5\pi}{12}-\sqrt{3}.$

5. Угол *A* четырехугольника *ABCD*, вписанного в окружность, равен 84 градуса. Найдите угол *C* этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

6. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

7. а) Решите уравнение $\cos 2x+2=\sqrt{3}\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\pi\right]$

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ №2

по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение стартовой работы по математике даётся 60 минут. Работа включает в себя 7 заданий. При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором. При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут. Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий.

Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

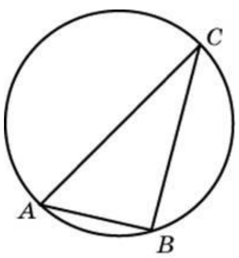
Вариант 2

1.Найдите значение выражения $\dfrac{6{,}7-2{,}5}{2{,}4}$.

2. Найдите корень уравнения: $\sqrt{84+5x}=-x$ Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{10^9}$.

4. Найдите значение выражения $\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\dfrac{5\pi}{12}$.



5. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса 3, равен 30 градусов. Найдите сторону AB этого треугольника.

6.Игральную кость с 6 гранями бросают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет равно 6 очков. Результат округлите до сотых.

7. а) Решите уравнение $2\cos^2 x+1=2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi;2\pi]$.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ №3

Вариант 1

Инструкция по выполнению работы

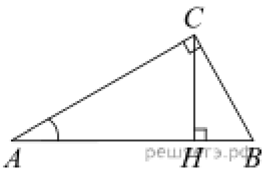
Ответом в заданиях части 1 (1–11) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на бланке. При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором. При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут. Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий.

Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

1. Решите уравнение $(5x-3)^2=(5x+13)^2.$

2. На конференцию приехали 5 учёных из Австрии, 4 из Германии и 6 из Сербии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад учёного из Сербии.



3.
В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, *BC* = 8, $\sin A=0,5.$ Найдите *BH*.

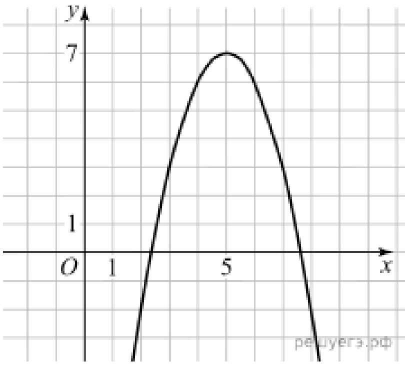
4.
Найдите значение выражения $$(36a^2-1)\cdot\left(\frac{1}{6a-1}-\frac{1}{6a+1}\right).$$

5. Найдите значение выражения $\dfrac{13\sin 152^\circ}{\cos 76^\circ\cdot\cos 14^\circ}.$

6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

7. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q=170-10p.$ Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p)=q\cdot p.$ Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 700 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

8. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 25 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 112 км/ч, и через 25 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

9. 

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c,$ где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x) = 0$.

10. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

11. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 12}.$

12. а) Решите уравнение $\left(32^{\cos x}\right)^{\sin x} = 4\sqrt{2}.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ №3

Вариант 2

Инструкция по выполнению работы

Ответом в заданиях части 1 (1–11) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на бланке. При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором. При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут. Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий.

Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

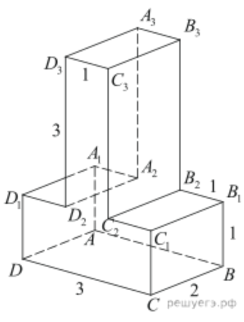
1. Найдите корень уравнения $\log_5(5-x)=\log_5 3.$

2. В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырех стран: 8 из Швеции, 12 из Дании, 7 из Норвегии и 5 из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Швеции.

3.В четырехугольник *ABCD* вписана окружность, $AB=12$, $BC=4$ и $CD=46.$
Найдите четвертую сторону четырехугольника.

4. Найдите $\log_a \dfrac{a}{b^3}$, если $\log_a b=5.$

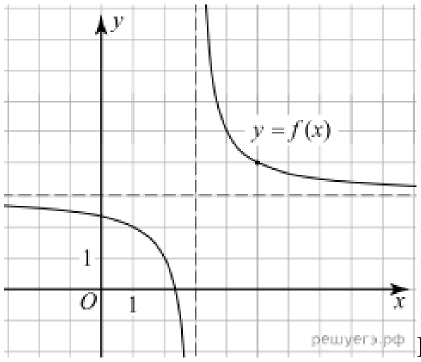
5. Найдите значение выражения $(x^2+16y^2-(x+4y)^2):(4xy).$



6. Найдите тангенс угла $D_1A_1D_2$ многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.

7. Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость *v* меняется по закону $\upsilon=\upsilon_0\cos\dfrac{2\pi t}{T},$ где *t* — время с момента начала колебаний, *T* = 2 с — период колебаний, $\upsilon_0=0,9$ м/с. Кинетическая энергия *E* (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\dfrac{m\upsilon^2}{2},$ где *m* — масса груза в килограммах, *v* — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 37 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

8. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

9. 

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{a}{x+b} + c,$ где числа a, b и c — целые. Найдите $f(-13)$.

10. В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублёвые монеты лежат в одном кармане.

11.

Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{-11 + 12x - x^2}$.

12. а) Решите уравнение $\sin x + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

ОТВЕТЫ к ТРЕНИРОВАЧНЫМ РАБОТАМ

Работа №1		
№	**Вариант 1**	**Вариант 2**
1	1,2	1,75
2	289,8	39,6
3	4	14
4	8	12
5	96	3
6	0,375	0,14
7	9	- 7
8	32	7
9	10	7
10	$(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4].$	$(-\infty;\ 0]\cup(1;\ 2)\cup(2;\ 3].$

Вариант 1.Задание 10

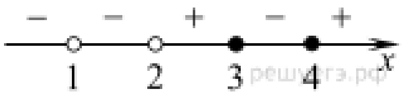
Решите неравенство: $$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0.$$

Решение.

Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-4)(x-2)}{x-1}-\frac{x-4}{(x-2)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-2)^2(x-4)-(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{((x-2)^2-1)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-3)(x-4)}{x-2}\le 0,\\ x\ne 1.\end{cases}$$



Множество решений исходного неравенства: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4].$

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4].$

Вариант 2.Задание 10.

Решите неравенство: $$\frac{x^2-4x+3}{x-2}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\le 0$$

Решение.

Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{x^2-4x+3}{x-2}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}-\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x-3)-(x-3)}{(x-1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{((x-1)^2-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-3)}{x-1}\le 0, \\ x\ne 2. \end{cases}$$

Таким образом, множество решений исходного неравенства: $(-\infty;\ 0]\cup(1;\ 2)\cup(2;\ 3]$.

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup(1;\ 2)\cup(2;\ 3]$.

Работа №2.		
№	**Вариант 1**	**Вариант 2**
1	1,2	1,75
2	9	-7
3	2	5
4	-1,5	-1,5
5	96	3
6	0,68	0,14
7	$a)\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\subset Z$ $\frac{-2\pi}{3}+2\pi m,\ m\subset Z$. б) $-\frac{\pi}{3};\ -\frac{2\pi}{3}.$	$a)\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\subset Z$ $\frac{-3\pi}{4}+2\pi m,\ m\subset Z$ б) $-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}$

Работа №3.		
№ п/п	**Вариант 1**	**Вариант 2**
1	-1	2
2	0,4	0,25
3	4	54
4	2	-14
5	26	-2
6	3	0,5
7	10	0,324
8	52	30

9	28	2,875
10	0,65	0,4
11	-3	6
12	а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{15\pi}{4}.$	а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\};$ б) $4\pi, 5\pi, \frac{13\pi}{3}.$

ИСТОЧНИКИ:

1. http://www.fipi.ru
2. Образовательный сайт Бородиной Марины Борисовны: https://nsportal.ru/borodina-marina-borisovna
3. Тренажёр по математике: (https://practicum.yandex.ru/math-foundations)
4. Видеоуроки по математике:(https://videouroki.net/blog/matematika, https://www.youtube.com/uchus.online)
5. Ященко И.В.Электронные пособия для подготовки и проведения уроков и форм контроля по математике (варианты)
6. Тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ: (https://100ballnik.com)
7. Открытый банк заданий, демоверсии, кодификаторы, тренировочные материалы (http://fipi.ru)
8. «Решу ЕГЭ или ОГЭ»: математика. Обучающая система Дм. Гущина (https://math-ege.sdamgia.ru/, https://math-oge.sdamgia.ru/)
9. Российская онлайн-платформа Учи.ру, (https://uchi.ru/)
10. Цифровой образовательный контент (https://educont.ru/)
11. Система онлайн-тестирования, тренажѐры по подготовке к ЕГЭ (http://use/edu-kuban.ru)