МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 1

КРАСНОАРМЕЙСКОГО РАЙОНА

Ст. Полтавская

Дидактический материал

Комплекс типовых заданий тестовой части

для подготовки к ЕГЭ по математике

«Задачи-ловушки на ЕГЭ по математике»

Для учащихся 10-11 классов

Разработала учитель математике Бородина М.Б.

2022г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дидактический материал предназначен для организации самостоятельной работы учащихся и осуществления контроля за их знаниями, умениями и навыками.

Дидактический материал содержит ответы на интересующие вопросы, рассматриваются задачи-ловушки в ЕГЭ по математике, в которых излагаются трудно осваиваемые примеры, задачи, уравнения и неравенства по математике и можно ознакомиться с разными способами их решения.

1. Простейшие уравнения

1. Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x.$ Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение.
Возведем в квадрат:

$$\sqrt{-72-17x}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} -72-17x=x^2, \\ -x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+17x+72=0, \\ x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=-8, \end{array}\right. \\ x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=-8. \end{array}\right.$$

Меньший корень равен −9.

Ответ: −9.

2. Решите уравнение $\sqrt{6+5x}=x.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение.
Возведем в квадрат:

$$\sqrt{6+5x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 6+5x=x^2, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=6, \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Уравнение имеет единственный корень, он и является ответом.

Ответ: 6.

Примечание.

Можно было сделать проверку. Подставляя число 6, получаем верное равенство $\sqrt{6+5\cdot 6}=6$, поэтому число 6 является корнем. Подставляя число −1, получаем неверное равенство $\sqrt{6+5\cdot(-1)}=-1$, поэтому число −1 не является корнем.

3. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+2}=-2.$

Решение.
Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$\sqrt[3]{x+2}=-2 \Leftrightarrow x+2=-8 \Leftrightarrow x=-10.$$

Ответ: −10.

4. Решите уравнение: $\sqrt{\dfrac{1}{1-5x}}=\dfrac{1}{6}.$

Решение.
Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{1}{1-5x}}=\frac{1}{6}. \Leftrightarrow \frac{1}{1-5x}=\frac{1}{36} \Leftrightarrow 1-5x=36 \Leftrightarrow x=-7.$$

Ответ: −7.

5. Найдите корень уравнения $5^{x-7}=\frac{1}{125}$.

Решение.

Перейдем к одному основанию степени:

$$5^{x-7}=\frac{1}{125}\Leftrightarrow 5^{x-7}=5^{-3}\Leftrightarrow x-7=-3\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

6. Решите уравнение $2^{3+x}=0,4\cdot 5^{3+x}$.

Решение.

Перейдем к одному основанию степени:

$$2^{3+x}=0,4\cdot 5^{3+x}\Leftrightarrow \frac{2^{3+x}}{5^{3+x}}=0,4\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{3+x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{1}\Leftrightarrow 3+x=1\Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: −2.

7. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2\Leftrightarrow 7-x=\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}\Leftrightarrow 7-x=49\Leftrightarrow x=-42.$$

Ответ: −42.

8. Решите уравнение $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$.

Решение.

Заметим, что $1=\log_5 5$ и используем формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$. Имеем:

$$\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1\Leftrightarrow \log_5(7-x)=\log_5(3-x)+\log_5 5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-x>0,\\7-x=5(3-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x>-3,\\7-x=15-5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<3,\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

9. Решите уравнение $\log_{x-5}49=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Решение.

На ОДЗ перейдем к уравнению на основание логарифма:

$$\log_{x-5}49=2\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)^2=49,\\x-5>0,\\x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-5=\pm 7,\\x-5>0,\\x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x-5=7\Leftrightarrow x=12.$$

Итак, на ОДЗ уравнение имеет только один корень.

Ответ: 12.

10. Найдите корень уравнения $\log_{81} 3^{2x-6} = 2.$

Решение.

Последовательно решаем уравнение:

$$\log_{81} 3^{2x-6} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{4} = 2 \Leftrightarrow 2x = 8+6 \Leftrightarrow x = 7.$$

Ответ: 7.

11. Найдите корни уравнения: $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}.$ В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \Leftrightarrow x-7 = \pm 1 + 6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8+6n; \\ x = 6+6n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Значениям $n \geq 0$ соответствуют положительные корни.

Если $n = -1$, то $x = 2$ и $x = 0.$

Если $n = -2$, то $x = 8-12 = -4$ и $x = 6-12 = -6.$

Значениям $n \leq -3$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число $-4.$

Ответ: −4.

12. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow x = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$$

Значению $k = 0$ соответствует $x = -1.$ Положительным значениям параметра соответствуют положительные значения корней, отрицательным значениям параметра соответствуют меньшие значения корней. Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число −1.

Ответ: −1.

13. Решите уравнение $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5.$ В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \\ \frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + 6k; \\ x = \frac{5}{2} + 6k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Значениям $k \leq -1$ соответствуют отрицательные корни.

Если $k = 0$, то $x = 0,5$ и $x = 2,5.$ Если $k = 1$, то $x = 6,5$ и $x = 8,5.$

Значениям $k \geq 2$ соответствуют большие положительные корни.

Наименьшим положительным решением является 0,5.

Ответ: 0,5.

2. Начала теории вероятностей

1. Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Решение. В среднем без дефектов выпускают 92 сумки из каждых 100, поэтому искомая вероятность равна 0,92.

Ответ: 0,92.

2.Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

По условию из любых $100+8=108$ сумок в среднем 100 качественных сумок. Значит, вероятность того, что купленная сумка окажется качественной, равна

$$\frac{100}{108}=0,925925\ldots\approx 0,93.$$

Ответ: 0,93.

3. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение. Общее количество выступающих на фестивале групп для ответа на вопрос неважно. Сколько бы их ни было, для указанных стран есть 6 способов взаимного расположения среди выступающих (Д — Дания, Ш — Швеция, Н — Норвегия):

...Д...Ш...Н..., ...Д...Н...Ш..., ...Ш...Н...Д..., ...Ш...Д...Н..., ...Н...Д...Ш..., ...Н...Ш...Д...

Дания находится после Швеции и Норвегии в двух случаях. Поэтому вероятность того, что группы случайным образом будут распределены именно так, равна

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0,33.$$

Ответ: 0,33.

4. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение. Из 5000 тысяч новорожденных 5000 − 2512 = 2488 девочек. Поэтому частота рождения девочек равна

$$\frac{2488}{5000}=0,4976\approx 0,498.$$

Ответ: 0,498.

5. На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

Решение. В самолете $12+18=30$ мест удобны пассажиру В., а всего в самолете 300 мест. Поэтому вероятность того, что пассажиру В. достанется удобное место равна $30:300=0,1$.

Ответ: 0,1.

6. В классе 26 учащихся, среди них два друга — Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение. Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников. Вероятность того, что второй друг окажется среди этих 12 человек, равна 12 : 25 = 0,48.

Ответ: 0,48.

7. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Решение. Пусть первой за стол сядет девочка, рядом с ней есть два места, на каждое из которых может сесть 8 человек, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что девочки будут сидеть рядом равна $\frac{2}{8} = 0,25.$

Ответ: 0,25.

8. За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

Решение. Пусть первой за стол сядет девочка, тогда рядом с ней есть два места, на каждое из которых претендует 4 человека, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что девочки будут сидеть рядом равна $2 \cdot \frac{1}{4} = 0,5$

9. За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между девочками будет сидеть один мальчик.

Решение. Рассмотрим сидящую за столом девочку. За столом есть два места через одно от нее, на каждое из которых претендует 200 человек, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик равна $2 \cdot \frac{1}{200} = 0,01.$

Ответ: 0,01

10. Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона», распределились случайным образом по восьми игровым группам — по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

Решение. По результатам первой жеребьёвки команда «Барселона» находится в одной из 8 групп. Вероятность того, что команда «Зенит» окажется в той же игровой группе равна одной восьмой.

Ответ: 0,125.

11. У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

Решение. У Вити в копилке лежит 12 + 6 + 4 + 3 = 25 монет на сумму 12 + 12 + 20 + 30 = 74 рубля. Больше 70 рублей останется, если достать из копилки либо рублёвую, либо двухрублёвую монету. Таких монет 12 + 6 = 18. Искомая вероятность равна 18 : 25 = 0,72. Ответ: 0,72.

12. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

Решение. Обозначим выпадение орла буквой О, а выпадение решки буквой Р. Возможных восемь исходов:

ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР

Из них благоприятными являются ООР, ОРО и РОО. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{3}{8}$, то есть 0,375. (Этот подход затруднителен в случае большого числа бросаний монетки.)

Ответ: 0,375.

13. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. Количество исходов, при которых в результате броска игральных костей выпадет 8 очков, равно 5: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2. Каждый из кубиков может выпасть шестью вариантами, поэтому общее число исходов равно $6\cdot 6 = 36$. Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков, равна

$$\frac{5}{36} = 0,138...$$

Ответ: 0,14.

14. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение. Вероятность того, что команда России окажется во второй группе, равна отношению количества карточек с номером 2, к общему числу карточек. Тем самым, она равна

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25

15**.** На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

Решение. На клавиатуре телефона 10 цифр, из них 5 четных: 0, 2, 4, 6, 8. Поэтому вероятность того, что случайно будет нажата четная цифра, равна 5 : 10 = 0,5.

Ответ: 0,5.

16. Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Решение. Натуральных чисел от 10 до 19 включительно десять, из них на три делятся три числа: 12, 15, 18. Следовательно, искомая вероятность равна 3:10 = 0,3.

Ответ: 0,3.

17. В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Решение. Всего туристов пять, случайным образом из них выбирают двоих. Вероятность быть выбранным равна 2 : 5 = 0,4.

Ответ: 0,4.

18. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Решение. Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0». Тогда благоприятных комбинаций три: 110, 101, 011, а всего комбинаций $2^3 = 8$: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Тем самым, искомая вероятность равна:

$$\frac{3}{8} = 0,375.$$

Ответ: 0,375.

19. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «A = сумма очков равна 5»?

Решение. Сумма очков может быть равна 5 в четырех случаях: «3 + 2», «2 + 3», «1 + 4», «4 + 1».

Ответ: 4.

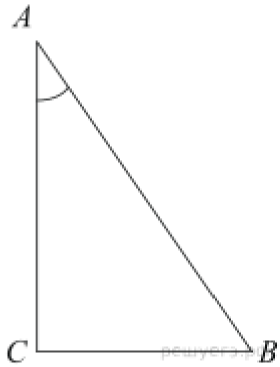
20. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадает орёл, во второй — решка).

Решение. Всего возможных исходов — четыре: орел-орел, орел-решка, решка-орел, решка-решка. Благоприятным является один: орел-решка. Следовательно, искомая вероятность равна 1 : 4 = 0,25.

Ответ: 0,25.

3. Планиметрия

Решение прямоугольного треугольника

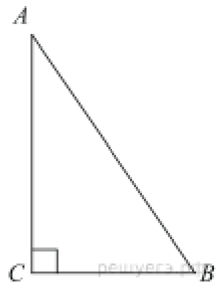


1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 4,8$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB.

Решение.
Имеем:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{AC}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{4,8}{\sqrt{1-\frac{49}{625}}} = 4,8 \cdot \frac{25}{24} = 5.$$

Ответ: 5.

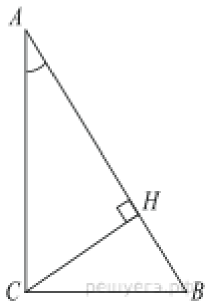


2. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $\cos A = \frac{\sqrt{17}}{17}$, *BC* = 2. Найдите *AC*.

Решение.
Имеем:

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} = \frac{BC\cos A}{\sin A} = \frac{BC\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1-\frac{1}{17}}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.



3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите AH.

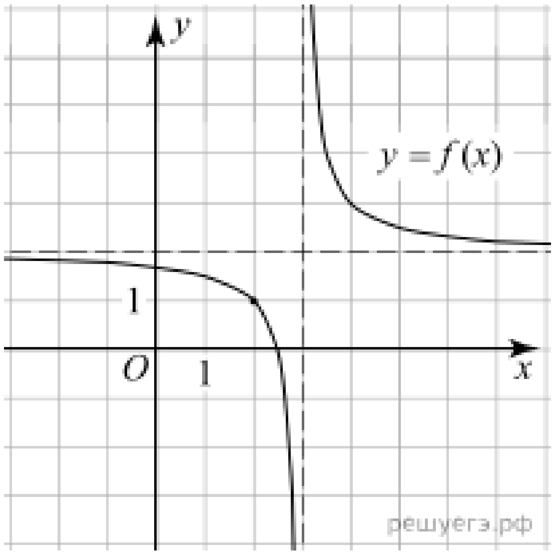
Решение.
Имеем:……
……

………
………

---

4. Графики функций

Гипербола



На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{a}{x+b}+c,$ где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите $f(13).$

Решение.

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=2,$ значит, $c=2.$
График функции имеет вертикальную асимптоту $x=3,$ значит, $b=-3.$
(Т.к. b не равно –x)

Выбираем точку А(2;1). По графику $f(2)=1,$ тогда

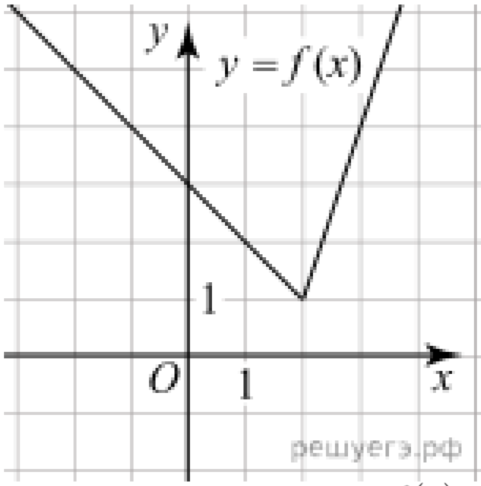
$$\frac{a}{2-3}+2=1 \Leftrightarrow a=1.$$

Таким образом, $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+2.$ Найдём $f(13).$

$$f(13)=\frac{1}{13-3}+2=2,1.$$

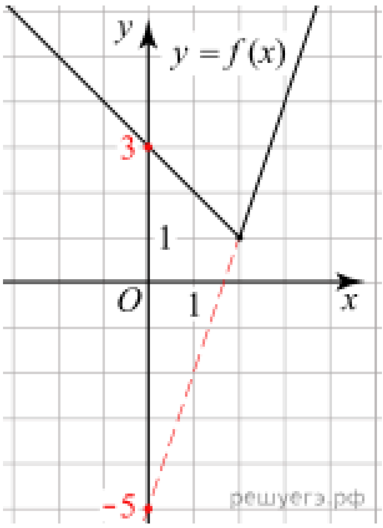
Ответ: 2,1.

Кусочно-линейная функция



1. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax + |bx + c| + d$, где числа *a*, *b*, *c* и *d* — целые. Найдите корень уравнения $ax + d = 0$.

Решение.



В любом из случаев раскрытия модуля получаем линейную функцию $f(x) = kx + l$,

F(x<2)=ax-bx-c+d=x(a-b)+(d-c)=k1*x+b1

F(x>2)=ax+bx-c+d=x(a+b)+(d+c)=k2*x+b2

По графику найдем через прямоугольный треугольник угловой коэффициент и точку пересечения оси OY

k1=-1; b1=3; (a-b)= k1=-1 и (d-c)=b1=3

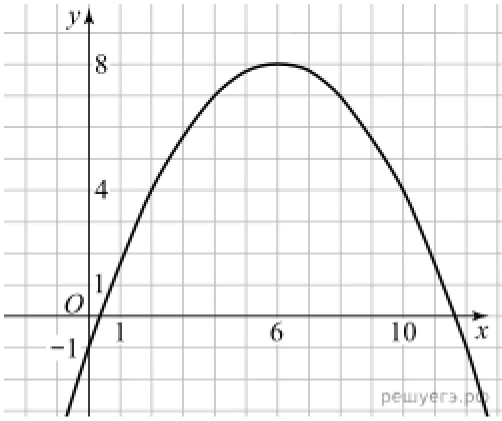
k2=+3; b2=-5; (a+b)= k2=3 и (d+c)=b2=-5, следовательно a=1, d=-1

Решим уравнение $ax + d = 0$:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Ответ: 1.

Парабола

1. 

2. На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\frac{x^2}{a}+bx+c,$ где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(3,5)$.

Решение.

1 способ: По формуле:

По рисунку определяем, что $f(x)=-\frac{(x-6)^2}{4}+8=-\frac{x^2}{4}+3x-1,$ значит, $a=-4, b=3, c=-1.$

Тогда $f(3,5)=f\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{49}{16}+\frac{21}{2}-1=$

$=-3-\frac{1}{16}+10+\frac{1}{2}-1=6+\frac{7}{16}=6,4375.$

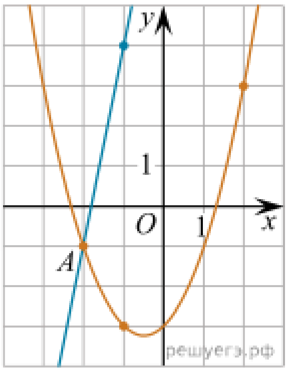
2 способ: c=-1, a=-y/x^2=-1/4, x=-b/2a следовательно b=-2ax=-2*(-1/4)*6=3

Или А(2;4), подставляем и находим параметр **a.**

Итак, f(3,5)= -1/4*3,5*3,5+3*3,5-1=6,4375

Ответ: 6,4375

Комбинированные функции

1. 

На рисунке изображены графики функций $f(x)=5x+9$ и $g(x)=ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

Решение. По графику, $g(-2)=-1$, $g(-1)=-3$, $g(2)=3$. Тогда

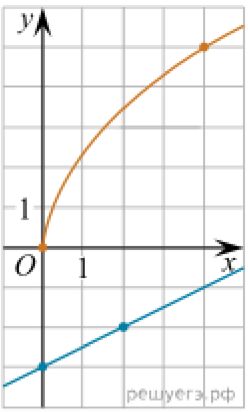
$$g(-2)-g(-1)=a(4-1)+b(-2+1)=3a-b=-1-(-3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3a-b=2,$$
$$g(-1)-g(2)=a(1-4)+b(-1-2)=-3a-3b=-3-3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3a-3b=-6.$$

Решая полученную систему, получаем: $a=1$, $b=1$, из $g(2)=3$ получим $c=-3$. Теперь найдём абсциссу точки B:

$$5x+9=x^2+x-3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4+\sqrt{16+48}}{2}, \\ x=\dfrac{4-\sqrt{16+48}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Таким образом, ответ — 6.

Ответ: 6.

2. 

На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx+b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.

Решение. По графику, $f(4)=5$, тогда $a\sqrt{4}=5\Leftrightarrow 2a=5\Leftrightarrow a=2,5.$ Тогда уравнение функции имеет вид $f(x)=2,5\sqrt{x}.$

Заметим, что k — тангенс угла наклона прямой. Тогда $k=\dfrac{1}{2}=0,5.$ По графику, $g(0)=-3$, значит, $0,5\cdot 0+b=-3\Leftrightarrow b=-3.$ Тогда уравнение прямой имеет вид $g(x)=0,5x-3.$

Теперь найдём абсциссу точки A:

$$\begin{cases} y = 2,5\sqrt{x}, \\ y = 0,5x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

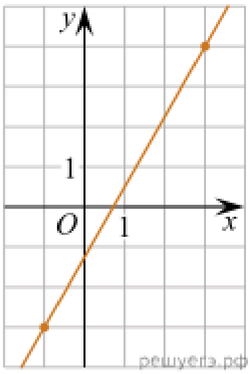
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2,5\sqrt{x} = 0,5x - 3, \\ y = 0,5x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5\sqrt{x} - 6 = 0, \\ y = 0,5x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 6, \\ \sqrt{x} = -1 \end{array} \right., \\ y = 0,5x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 6, \\ y = 0,5x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36, \\ y = 15. \end{cases}$$

Таким образом, $x = 36$.

Ответ: 36.

Линейные функции



1.

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-5)$.

Решение. Заметим, что для линейной функции

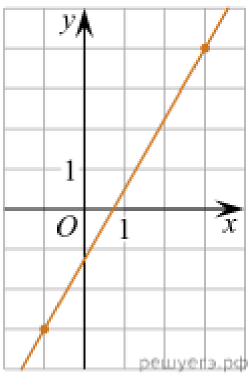
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} = k,$$

Тогда,

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{f(-1) - f(-5)}{-1 - (-5)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 - (-3)}{4} = \frac{-3 - f(-5)}{4} \Leftrightarrow f(-5) = -10.$$

Ответ: $f(-5) = -10$.



2.

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b.$ Найдите значение *x*, при котором $f(x) = -13,5.$

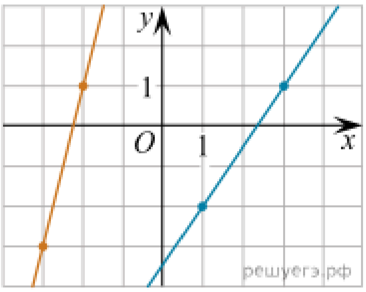
Решение. По рисунку определяем, что $f(-1) = -3,\ f(3) = 4,$ тогда

$$\begin{cases} -3 = k \cdot (-1) + b, \\ 4 = k \cdot 3 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{7}{4}, \\ b = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Значит, $f(x) = \dfrac{7}{4}x - \dfrac{5}{4},$ решим уравнение $f(x) = -13,5:$

$$\frac{7}{4}x - \frac{5}{4} = -13,5 \Leftrightarrow \frac{7}{4}x - \frac{5}{4} = -\frac{54}{4} \Leftrightarrow 7x = -49 \Leftrightarrow x = -7$$

Ответ: −7.



3.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.

Решение. Заметим, что уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$.

Найдём уравнение функции, отмеченной на рисунке оранжевым цветом. Заметим, что k — тангенс угла наклона прямой, тогда $k = \dfrac{4}{1} = 4.$ По графику, $f(-2) = 1$, отсюда $4 \cdot (-2) + b = 1 \Leftrightarrow b = 9.$ Следовательно, уравнение прямой имеет вид $y = 4x + 9.$

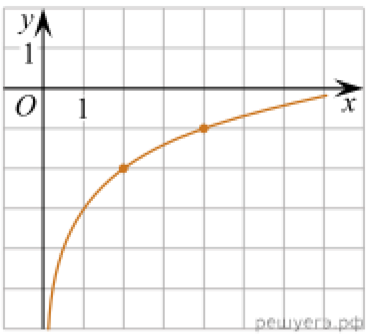
Найдём уравнение функции, отмеченной на рисунке синим цветом. Заметим, что k — тангенс угла наклона прямой, тогда $k = \dfrac{3}{2} = 1,5.$ По графику, $f(3) = 1$, отсюда $1,5 \cdot 3 + b = 1 \Leftrightarrow b = -3,5.$ Следовательно, уравнение прямой имеет вид $y = 1,5x - 3,5.$

Теперь найдём абсциссу точки пересечения функций:

$$4x + 9 = 1,5x - 3,5 \Leftrightarrow 2,5x = -12,5 \Leftrightarrow x = -5.$$

Ответ: −5.

Показательные и логарифмические функции



1.

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x.$ Найдите $f(32)$.

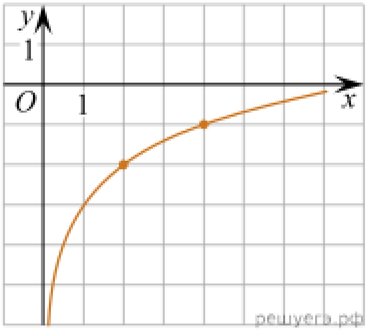
Решение. По рисунку определяем, что $f(2)=-2,\, f(4)=-1$. Тогда

$$\begin{cases} -2=b+\log_a 2, \\ -1=b+\log_a 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=2b+2\log_a 2, \\ -1=b+2\log_a 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3, \\ a=2. \end{cases}$$

Значит, $f(x)=-3+\log_2 x$. Найдём значение $f(32)$:

$$f(32)=-3+\log_2 32=2$$

Ответ: 2.



2.

На рисунке изображён график функции $f(x)=b+\log_a x$. Найдите значение *x*, при котором $f(x)=1$.

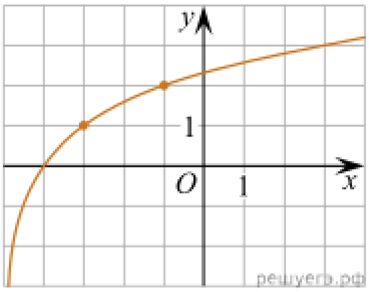
Решение. По рисунку определяем, что $f(2)=-2,\, f(4)=-1$. Тогда

$$\begin{cases} -2=b+\log_a 2, \\ -1=b+\log_a 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=2b+2\log_a 2, \\ -1=b+2\log_a 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3, \\ a=2. \end{cases}$$

Значит, $f(x)=-3+\log_2 x$. Решим уравнение $f(x)=1$:

$$1=-3+\log_2 x \Leftrightarrow 4=\log_2 x \Leftrightarrow x=16.$$

Ответ: 16.



3.

На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(11)$.

Решение. Область определения функции $f(x)=\log_a(x+b)$ — интервал $(-b;+\infty)$. По рисунку определяем область определения данной функции: $(-5;+\infty)$, значит, $b=5$. Учитывая, что $f(-1)=2$, найдём *a*.

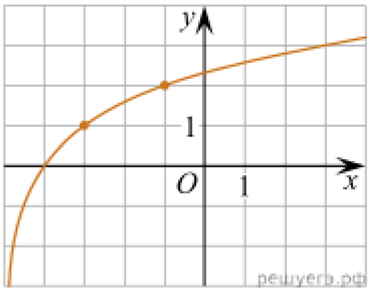
$$2=\log_a(-1+5) \Leftrightarrow 2=\log_a 4 \Leftrightarrow a=2.$$

Значит, $f(x)=\log_2(x+5)$. Найдём значение $f(11)$:

$$f(11)=\log_2(11+5)=\log_2 16=4.$$

Ответ: 4.

4.



На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение *x*, при котором $f(x) = 4$.

Решение. Область определения функции $f(x) = \log_a(x+b)$ — интервал $(-b; +\infty)$. По рисунку определяем область определения данной функции: $(-5; +\infty)$, значит, $b = 5$. Учитывая, что $f(-1) = 2$, найдём *a*.

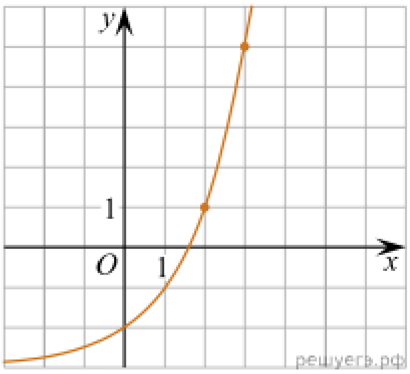
$$2 = \log_a(-1+5) \Leftrightarrow 2 = \log_a 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

Значит, $f(x) = \log_2(x+5)$. Решим уравнение $f(x) = 4$:

$$4 = \log_2(x+5) \Leftrightarrow x+5 = 2^4 \Leftrightarrow x+5 = 16 \Leftrightarrow x = 11.$$

Ответ: 11.

5.



На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.

Решение. Множество значений функции $f(x) = a^x + b$ — интервал $(b; +\infty)$. По рисунку определяем множество значений данной функции: $(-3; +\infty)$, значит, $b = -3$. Учитывая, что $f(2) = 1$ и $a > 0$ найдём *a*.

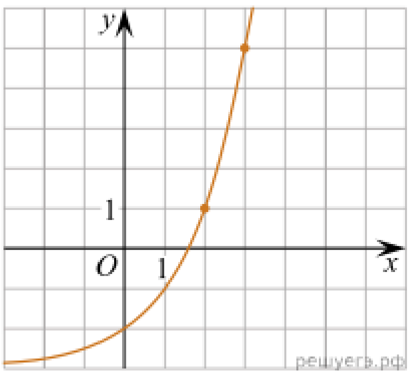
$$1 = a^2 - 3 \Leftrightarrow a^2 = 4 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 2$$

Значит, $f(x) = 2^x - 3$. Найдём $f(6)$:

$$f(6) = 2^6 - 3 = 64 - 3 = 61.$$

Ответ: 61.

6.



На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение *x*, при котором $f(x) = 29$.

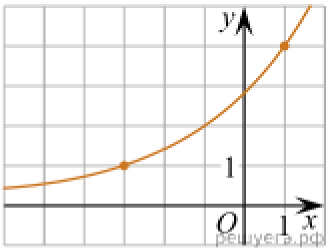
Решение. Множество значений функции $f(x) = a^x + b$ — интервал $(b; +\infty)$. По рисунку определяем множество значений данной функции: $(-3; +\infty)$, значит, $b = -3$. Учитывая, что $f(2) = 1$ и $a > 0$ найдём *a*.

$$1 = a^2 - 3 \Leftrightarrow a^2 = 4 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 2$$

Значит, $f(x) = 2^x - 3$. Решим уравнение $f(x) = 29$:

$$29 = 2^x - 3 \Leftrightarrow 2^x = 32 \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

7. 

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите $f(-7)$.

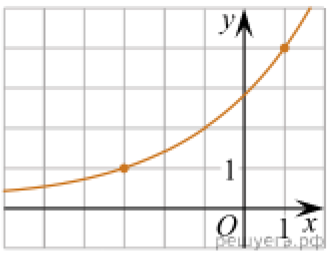
Решение. По рисунку определяем, что $f(-3) = 1,\ f(1) = 4$. Тогда

$$\begin{cases} 1 = a^{-3+b}, \\ 4 = a^{1+b} \end{cases} \underset{a>0, a\neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b = 3, \\ a = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Значит, $f(x) = (\sqrt{2})^{x+3}$. Найдём $f(-7)$:

$$f(-7) = (\sqrt{2})^{-7+3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

8. 

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите значение *x*, при котором $f(x) = 16$.

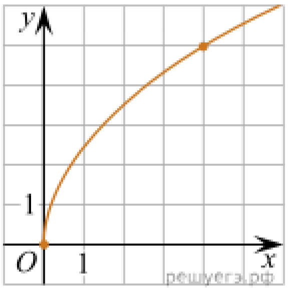
Решение. По рисунку определяем, что $f(-3) = 1,\ f(1) = 4$. Тогда

$$\begin{cases} 1 = a^{-3+b}, \\ 4 = a^{1+b} \end{cases} \underset{a>0, a\neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b = 3, \\ a = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Значит, $f(x) = (\sqrt{2})^{x+3}$. Решим уравнение $f(x) = 16$:

$$(\sqrt{2})^{x+3} = 16 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{x+3} = (\sqrt{2})^8 \Leftrightarrow x + 3 = 8 \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.



9.

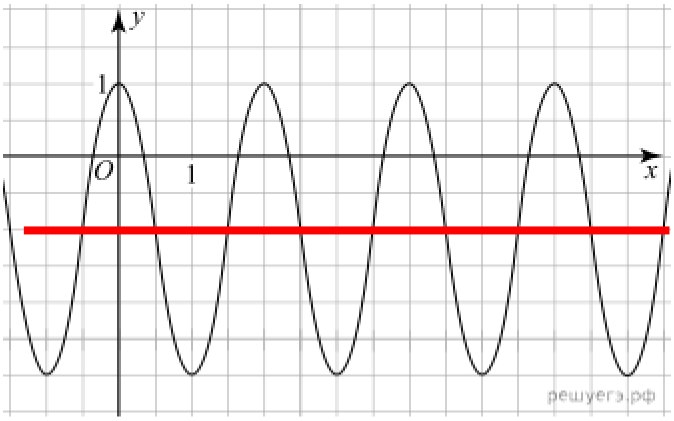
На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6,76)$.

Решение. По графику, $f(4) = 5$, тогда $k \cdot \sqrt{4} = 5 \Leftrightarrow 2k = 5 \Leftrightarrow k = 2,5$. Таким образом,

$$f(6,76) = 2,5 \cdot \sqrt{6,76} = 2,5 \cdot 2,6 = 6,5.$$

Ответ: 6,5.

Тригонометрическая функция



1. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\cos(b\pi x + c) + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите $f\left(\frac{100}{3}\right)$.

Решение.

По графику $f_{max} = 1$, $f_{min} = -3$,

тогда $d = \frac{f_{max} + f_{min}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$, и $|a| = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} = \frac{1-(-3)}{2} = 2$.

По графику A(0;1), то $f(0) = 1$, тогда,

если $a = -2$, то

$-2\cos c - 1 = 1 \Leftrightarrow \cos c = -1$ — не имеет целочисленных решений,

если $a = 2$, то

$$2\cos c - 1 = 1 \Leftrightarrow \cos c = 1 \Leftrightarrow c = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \underset{c \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} c = 0.$$

Значит, $a = 2$ **и** $c = 0$.

Найдём наименьший положительный период функции $f(x) = 2\cos(b\pi x) - 1$:

$$2\cos(b\pi x) - 1 = 2\cos(b\pi x \pm 2\pi) - 1 = 2\cos\left(b\pi\left(x \pm \frac{2}{b}\right)\right) - 1$$

Наименьший положительный период функции $f(x)$ равен $\pm\frac{2}{b}$, а по графику наименьший положительный период равен 2, тогда $b=\pm 1$.

Или можно найти по точке B(1;-3), то 3=2cos(bП*1+0)-1, b=2.

Таким образом, $f(x)=2\cos(-\pi x)-1=2\cos(\pi x)-1$. Найдём $f\left(\frac{100}{3}\right)$.

$$f\left(\frac{100}{3}\right)=2\cos\frac{100\pi}{3}-1=2\cos\frac{4\pi}{3}-1=-2.$$

Ответ: −2.

………………………………………………………………………………………….

10. Вероятности сложных событий

……

7. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $(0,3)^3 = 0,027.$

Ответ: 0,027.

8. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Рассмотрим события

A = кофе закончится в первом автомате,
B = кофе закончится во втором автомате.

Тогда

A·B = кофе закончится в обоих автоматах,
A + B = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию $P(A) = P(B) = 0,25$; $P(A\cdot B) = 0,15$.

События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B) = 0,25 + 0,25 - 0,15 = 0,35.$$

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0,35 = 0,65$.

Ответ: 0,65.

9. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение. Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда A + B + C = «чайник прослужит больше года».

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час, наносекунду и т. д. — равна нулю. Тогда:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)= P(A) + P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем

$$0,97 = P(A) + 0,89.$$

Тем самым для искомой вероятности имеем:

$$P(A) = 0,97 - 0,89 = 0,08.$$

Ответ: 0,08.

11. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Решение. Рассмотрим события A = «в автобусе меньше 10 пассажиров» и B = «в автобусе от 10 до 17 пассажиров». Их сумма — событие A + B = «в автобусе меньше 18 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,82 = 0,51 + P(B), откуда P(B) = 0,82 − 0,51 = 0,31.

Ответ: 0,31.

12. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение. Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна

$$0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}02048 \approx 0{,}02.$$

Ответ: 0,02.

13. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: 0,3·0,3 = 0,09.

Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна 1 − 0,09 = 0,91.

Ответ: 0,91.

14. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

В ответе укажите наименьшее необходимое количество выстрелов.

Решение.

$P(1) = 0{,}6.$
$P(2) = P(1)\cdot 0{,}4 = 0{,}24.$
$P(3) = P(2)\cdot 0{,}4 = 0{,}096.$
$P(4) = P(3)\cdot 0{,}4 = 0{,}0384;$
$P(5) = P(4)\cdot 0{,}4 = 0{,}01536.$

Последняя вероятность меньше 0,02, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени. Ответ:5

16. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение. Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: 3+1, 1+3, 3+3. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Каждое из этих событий представляет собой произведение двух независимых событий — результата в первой и во второй игре. Отсюда имеем:

$$P(N \geqslant 4) = P(3+1) + P(1+3) + P(3+3) =$$
$$= P(3)\cdot P(1) + P(1)\cdot P(3) + P(3)\cdot P(3) == 0{,}4\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}4 + 0{,}4\cdot 0{,}4 =$$
$$= 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}16 = 0{,}32.$$

Ответ: 0,32.

17. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение. Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

$$P(XXO) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}128;$$
$$P(XOO) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}128;$$
$$P(OXO) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008;$$
$$P(OOO) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}128.$$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0{,}128 + 0{,}128 + 0{,}008 + 0{,}128 = 0{,}392.$$

Ответ: 0,392.

18. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

Ответ: 0,9975.

19. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение. Джон промахнется, если схватит пристрелянный револьвер и промахнется из него, или если схватит непристрелянный револьвер и промахнется из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}04$ и $0{,}6 \cdot (1 - 0{,}2) = 0{,}48$. События схватить пристрелянный или непристрелянный револьвер образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно наступает), поэтому, по формуле полной вероятности, Джон промахнется с вероятностью $0{,}04 + 0{,}48 = 0{,}52$.

Ответ: 0,52.

20. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$.

Ответ: 0,019.

21. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение. Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}045$ и $0{,}01 \cdot 0{,}95 = 0{,}0095$.

События быть больным или быть здоровым образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно наступает), поэтому можно применить формулу полной вероятности. Получим: $0,045+0,0095=0,0545.$

Ответ: 0,0545.

22. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате следующих событий: батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или батарейка исправна, но по ошибке забракована. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0,02\cdot 0,99$ и $0,98\cdot 0,01.$

События быть неисправной батарейкой или быть исправной образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно происходит), поэтому можно применить формулу полной вероятности. Получим:

$$0,0198+0,0098=0,0296.$$

Ответ: 0,0296.

23. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Это решение можно записать коротко. Пусть x — искомая вероятность того, что куплено яйцо, произведенное в первом хозяйстве. Тогда $1-x$ — вероятность того, что куплено яйцо, произведенное во втором хозяйстве. По формуле полной вероятности имеем:

$$0,4x+0,2(1-x)=0,35\Leftrightarrow 0,2x=0,15\Leftrightarrow x=0,75.$$

Ответ: 0,75.

25. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент *З.* получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что *З.* сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение. Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, *З.* нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D — это события, в которых *З.* сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C+D)=P(C)+P(D)-P(C\cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$\begin{aligned}P(AB(C+D))&=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C+D)=\\&=P(A)\cdot P(B)\cdot (P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D))\\&=0,6\cdot 0,8\cdot (0,7+0,5-0,7\cdot 0,5)=0,408.\end{aligned}$$

Ответ: 0,408.

26. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение. Рассмотрим события А = «в автобусе меньше 15 пассажиров» и В = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма — событие А + В = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,94 = 0,56 + P(B), откуда P(B) = 0,94 − 0,56 = 0,38.

Ответ: 0,38.

.

28. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

Решение. Пусть завод произвел n тарелок. В продажу поступят все качественные тарелки и 20% невыявленных дефектных тарелок: $0,9n + 0,2 \cdot 0,1n = 0,92n$ тарелок. Поскольку качественных из них $0,9n$, вероятность купить качественную тарелку равна

$$\frac{0,9n}{0,92n} = \frac{90}{92} = 0,978...$$

Округляя результат до сотых, получаем 0,98.

Ответ: 0,98.

29. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение. Вероятность того, что первый магазин не доставит нужный товар равна $1 - 0,9 = 0,1$. Вероятность того, что второй магазин не доставит нужный товар равна $1 - 0,8 = 0,2$. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: $0,1 \cdot 0,2 = 0,02$.

Ответ: 0,02.

30. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

Решение. Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начинает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$.

Ответ: 0,125.

31. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение. Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами: 5, 10, 10; 10, 5, 10 или 10, 10, 5. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5}.$$

32. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, B — событие, состоящее в том, что первый раз стрелок промахнулся, а со второго выстрела поразил мишень. Вероятность события A равна $P(A) = 0,7$. Событие B является произведением двух независимых событий, поэтому его вероятность равна произведению вероятностей этих событий: $P(B) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,7 + 0,21 = 0,91.$$

Ответ: 0,91.

33. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Мотор» по очереди играет с командами «Статор», «Стартер» и «Ротор». Найдите вероятность того, что «Мотор» будет начинать с мячом только вторую игру.

Решение. Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Мотор» не начинает первую игру, начинает вторую игру, не начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$.

Ответ: 0,125.

34. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 3 очка.

Решение. При двукратном бросании кубика 8 очков может получиться только в пяти случаях: $6+2$, $5+3$, $4+4$, $3+5$ и $2+6$. При этом во второй раз только единожды выпало 3 очка. Значит, вероятность того, что во второй раз выпало 3 очка при условии, что в сумме выпало 8 очков, равна одной пятой.

Ответ: 0,2.

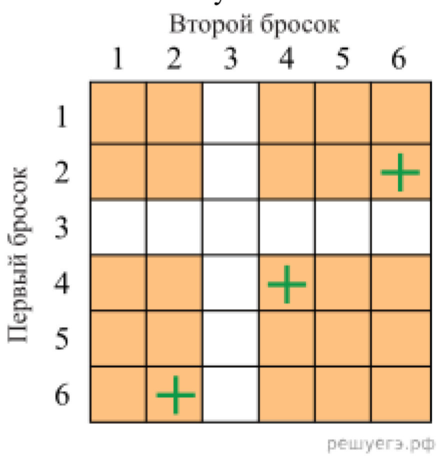
35. При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

Решение. При двукратном бросании игральной кости 9 очков может получится только в четырёх случаях: $6+3$, $5+4$, $4+5$ и $3+6$. При этом 5 очков выпадало в двух из этих случаев. Значит, вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков равна

$$\frac{N_{\text{благопр.}}}{N_{\text{общ.}}} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

36. Игральную кость бросили два раза. Известно, что три очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 8».



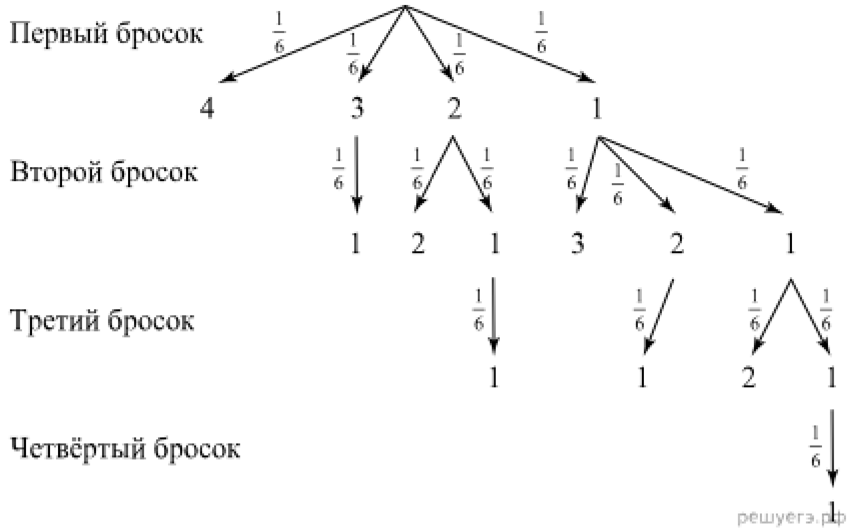
Решение. Условию, что при двукратном броске игральной кости три очка не выпали ни разу, соответствует 25 исходов (отмечены оранжевым цветом). Событию «сумма выпавших очков равна 8» соответствуют 3 из них (отмечены зелёным цветом). Значит, искомая вероятность равна

$$\frac{N_{\text{благопр.}}}{N_{\text{общ.}}} = \frac{3}{25} = 0{,}12.$$

Ответ: 0,12.

37. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

Решение. Пусть событие A состоит в том, сумма всех выпавших в результате одного или нескольких бросаний очков равна 4. Построим дерево вариантов, приводящих к этому событию.



Найдем вероятность $P(A)$:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{1}{6^4} = \frac{6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1}{6^4} = \frac{343}{6^4}.$$

Пусть событие B состоит в том, что был сделан один бросок. Тогда искомая вероятность $P(B|A)$ события B при условии, что событие A наступило (вероятность того, что был сделан один бросок, при условии что выпало 4 очка) определяется по формуле условной вероятности $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Вероятность произведения событий B и A, то есть события, в котором при первом бросании кости выпало 4 очка, равна $\frac{1}{6}$. Тогда для искомой вероятности получаем:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{6} : \frac{343}{6^4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6^4}{343} = \frac{216}{343} = 0,6297...$$

Ответ просят округлить до сотых.

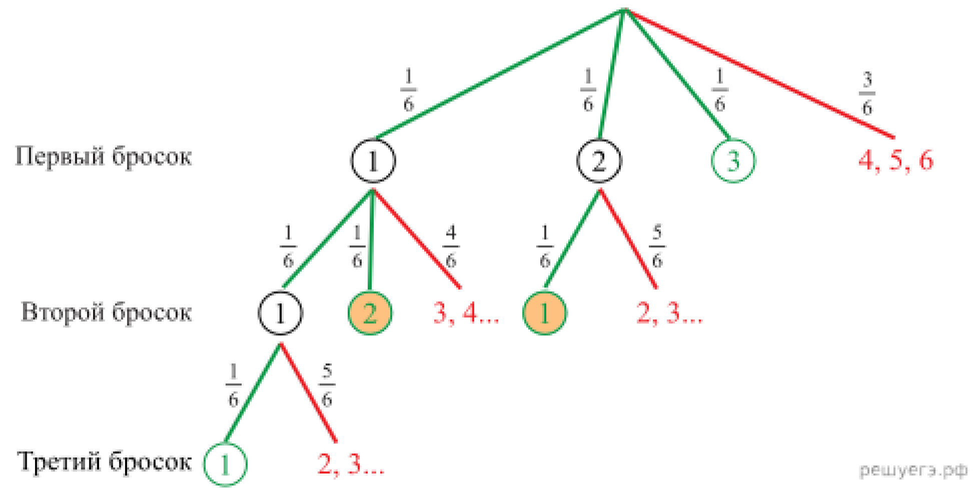
Ответ: 0,63.

Примечание.

Любознательный читатель наверняка обратит внимание на различие в способах решения этой задачи и задачи 508762. В задаче 508762 подсчитывалось общее количество вариантов, с помощью которых можно получить заданную сумму очков, а затем количество подходящих вариантов делилось на общее количество. В данной задаче общее количество вариантов равно 8: 4, $1+3$, $3+1$, $2+2$, $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$, $1+1+1+1$. Подходящий вариант только один. Однако эти варианты не являются равновероятными, поэтому нельзя делить количество подходящих вариантов на общее количество вариантов, а необходимо рассчитывать вероятности вариантов и использовать формулу, приведенную в решении данной задачи.

38. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что было сделано два броска? Ответ округлите до сотых.

Решение. Изобразим с помощью дерева возможные исходы. Зелёным цветом отмечены исходы, удовлетворяющие условию «сумма выпавших очков равна 3». Оранжевым цветом отмечены исходы, удовлетворяющие условию «сумма очков, выпавших ровно за два броска равна 3».



Тогда вероятность события «сделано два броска» при условии «в сумме выпало 3 очка» равна:

$$\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{1}{6}\cdot\left(\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\frac{1}{6}+1\right)}=\frac{2\cdot\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}+1\right)^2}=\frac{12}{49}=0,2448\ldots$$

Ответ просят округлить до сотых.

Ответ: 0,24.

39. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Решение. Предположим, что бросали первый кубик. Тогда вероятность того, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков, равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}.$ Теперь предположим, что бросали второй кубик. Поскольку на втором кубике числа 3 и 5 встречаются по два раза, вероятность того, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков, равна $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{9}.$ Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{18}+\frac{2}{9}}=\frac{4}{1+4}=0,8.$

Ответ: 0,8.

40. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чисел, больших, чем 2, а числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Решение. Предположим, что бросали первый кубик. Тогда вероятность того, что в каком-то порядке выпали 1 и 2, равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}.$ Теперь предположим, что бросали второй кубик. Поскольку на втором кубике числа 1 и 2 встречаются по три раза, вероятность того, что в каком-то порядке выпали 1 и 2, равна $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$ Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{18}+\frac{1}{2}}=\frac{9}{1+9}=0,9.$

Ответ: 0,9.

41. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Решение. Предположим, что бросали первый кубик. Тогда вероятность того, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков, равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}.$ Теперь предположим, что бросали второй кубик. Поскольку на втором кубике числа 3 и 5 встречаются по два раза, вероятность того, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков, равна $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{9}.$ Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}+\frac{2}{9}}=\frac{1}{1+4}=0,2.$

Ответ: 0,2.

42. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Решение. Предположим, что бросали первый кубик. Тогда вероятность того, что в каком-то порядке выпали 1 и 2, равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}.$ Теперь предположим, что бросали второй кубик. Поскольку на втором кубике числа 1 и 2 встречаются по три раза, вероятность того, что в каком-то порядке выпали 1 и 2, равна $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$ Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{1+9}=0,1.$

Ответ: 0,1.

43. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечётных чисел, а чётные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Решение. Предположим, что бросали первый кубик. Тогда вероятность того, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков, равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}.$ Теперь предположим, что бросали второй кубик. Поскольку на втором кубике числа 4 и 6 встречаются по два раза, вероятность того, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков, равна $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{9}.$ Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{18}+\frac{2}{9}}=\frac{4}{1+4}=0,8.$

Ответ: 0,8.

44. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечётных чисел, а чётные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Решение. Предположим, что бросали первый кубик. Тогда вероятность того, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков, равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}.$ Теперь предположим, что бросали второй кубик. Поскольку на втором кубике числа 4 и 6 встречаются по два раза, вероятность того, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков, равна $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{9}.$ Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}+\frac{2}{9}}=\frac{1}{1+4}=0,2.$

Ответ: 0,2.

45. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 5 и 6 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 5 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

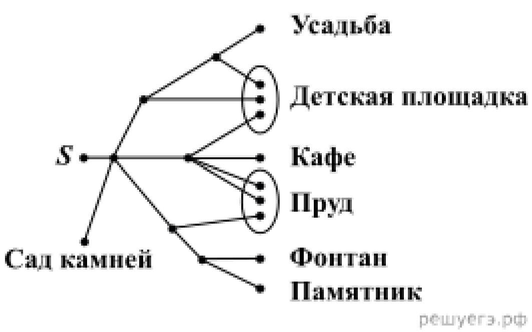
Решение. Предположим, что бросали первый кубик. Тогда вероятность того, что в каком-то порядке выпали 5 и 6 очков, равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}.$ Теперь предположим, что бросали второй кубик. Поскольку на втором кубике числа 5 и 6 встречаются по три раза, вероятность того, что в каком-то порядке выпали 5 и 6 очков, равна $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$ Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{18}+\frac{1}{2}}=\frac{9}{1+9}=0,9.$

Ответ: 0,9.

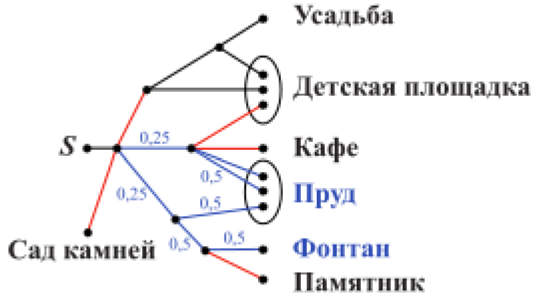
46. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

Решение. Заметим, что вероятность получения новой принцессы равна $\frac{8}{10},$ а вероятность противоположного события — получение старой принцессы — $\frac{2}{10}.$ Вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить 2 шоколадных яйца, равна $\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{10}=0,16.$ Вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить 3 шоколадных яйца, равна $\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{10}=0,032.$ Таким образом, искомая вероятность — 0,16 + 0,032 = 0,192.

Ответ: 0,192.

47. 

Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



Решение. Чтобы выйти к фонтану Артёму нужно пройти три развилки. На первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек, на второй — одну из двух, на третьей — одну из двух. Значит, вероятность выйти к фонтану равна $0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625.$

Выйти к пруду Артём может двумя разными способами. Первый способ: на первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек, на второй — одну из двух. Вероятность этого способа равна $0,25 \cdot 0,5 = 0,125.$ Второй способ: на первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек, на второй — две из четырёх. Вероятность этого способа тоже равна $0,25 \cdot 0,5 = 0,125.$

Значит, вероятность того, что Артём выйдет к пруду или фонтану, равна $0,0625 + 0,125 + 0,125 = 0,3125.$

Ответ: 0,3125.

48. Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Решение. При трёхкратном бросании игральной кости 6 очков может получится только в десяти случаях: $1+2+3$, $1+3+2$, $2+1+3$, $2+3+1$, $3+1+2$, $3+2+1$, $2+2+2$, $1+1+4$, $1+4+1$ и $4+1+1$. При этом 3 очка выпадает в шести из этих случаев. Значит, вероятность того, что хотя бы раз выпало 3 очка равна

$$\frac{N_{\text{благ}}}{N_{\text{общ}}} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

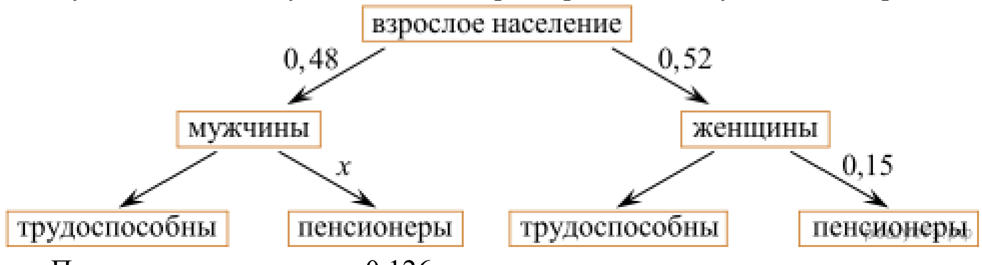
49. В городе 48 % взрослого населения — мужчины. Пенсионеры составляют 12,6 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Решение. Женщин среди взрослого населения $100\% - 48\% = 52\%$, среди них $52\% \cdot 0,15 = 7,8\%$ пенсионерок. Всего в городе 12,6 % пенсионеров, поэтому мужчин-пенсионеров $12,6\% - 7,8\% = 4,8\%$ от взрослого населения города. Поскольку всего среди взрослого населения города 48 % мужчин и среди них 4,8 % пенсионеров, пенсионером является каждый десятый: $4,8\% : 48\% = 0,1.$ Следовательно, вероятность того, что случайно выбранный мужчина окажется пенсионером равна 0,1.

Ответ: 0,1.

Приведём другое решение.

Пусть x — доля мужчин-пенсионеров среди всех мужчин. Построим дерево вероятностей (см. рис.).



Пенсионеры составляют 0,126 взрослого населения города, откуда получаем:

$$0,48x + 0,52 \cdot 0,15 = 0,126 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4800x + 52 \cdot 15 = 1260 \Leftrightarrow 4800x = 480 \Leftrightarrow x = 0,1.$$

Таким образом, вероятность того, что случайно выбранный мужчина окажется пенсионером, равна 0,1.

50. В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Решение. Заметим, что возможны два случая, когда выбраны один синий и один красный фломастер: сначала выбрали синий, потом красный; сначала выбрали красный, потом синий. Эти события несовместны, следовательно, искомая вероятность равна Р(С; К) + Р(К; С):

$$\frac{8}{25} \cdot \frac{6}{24} + \frac{6}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{2}{25} + \frac{2}{25} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

Ответ: 0,16.

5. Наибольшее и наименьшее значение функций

1. Найдите точку минимума функции $y=(3-x)e^{3-x}$.

Решение.

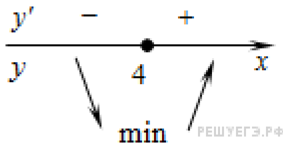
Найдем производную заданной функции:

$$y'=(3-x)'e^{3-x}+(3-x)(e^{3-x})'=-e^{3-x}+(3-x)e^{3-x}(-1)=(x-4)e^{3-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x-4)e^{3-x}=0 \Leftrightarrow x=4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=4$.

Ответ: 4.

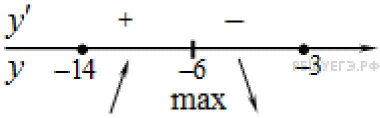
2. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2(x-10)+8$ на отрезке $[-14;-3]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y'=2(x+6)(x-10)+(x+6)^2\cdot 1=(x+6)(2x-20+x+6)=(x+6)(3x-14).$$

Производная обращается в нуль в точках -6 и $\frac{14}{3}$, заданному отрезку принадлежит число -6. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



В точке −6 функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-6)=(-6+6)^2(-6-10)+8=8.$$

Ответ: 8.

3. Найдите наибольшее значение функции $y=3x-2x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$.

Решение.

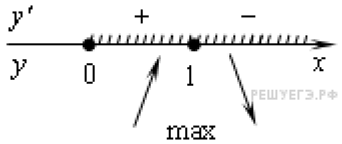
Заметим, что $y=-2x^{\frac{3}{2}}+3x$ и найдем производную этой функции:

$$y'=-2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+3=-3\sqrt{x}+3.$$

Найдем нули производной:

$$-3\sqrt{x}+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Наибольшим значением функции на отрезке [0; 4] является ее значение в точке максимума. Найдем его:

$$y(1)=-2+3=1.$$

Ответ: 1.

1. Найдите наименьшее значение функции $y=3x-\ln(x+3)^3$ на отрезке [−2,5; 0].

Решение.

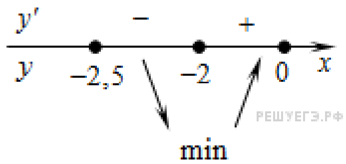
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x)=3-\frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3-\dfrac{3}{x+3}=0, \\ -2,5\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+3}=1, \\ -2,5\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ -2,5\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=-2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2)=-2\cdot 3-\ln 1=-6.$$

Ответ: −6.

11. Найдите точку минимума функции $y=3x-\ln(x+3)^3$.

Решение.

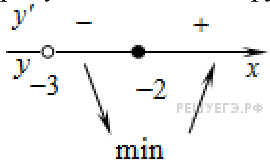
Заметим, что $y=3x-3\ln(x+3)$. Область определения функции — открытый луч $(-3;+\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x)=3-\frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной:

$$3-\frac{3}{x+3}=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

Найденная точка лежит на луче $(-3;+\infty)$. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=-2$.

Ответ: −2.

17. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x}-6e^{x}+3$ на отрезке $[1;2]$.

Решение.

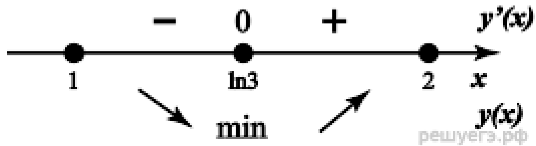
Найдем производную заданной функции:

$$y'=2e^{2x}-6e^{x}=2e^{x}(e^{x}-3).$$

Найдем нули производной:

$$2e^{x}(e^{x}-3)=0 \Leftrightarrow e^{x}=3 \Leftrightarrow x=\ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его:

$$y(\ln 3)=e^{2\ln 3}-6e^{\ln 3}+3=3^2-6\cdot 3+3=-6.$$

Ответ: −6.

1. Найдите наибольшее значение функции $y=12\cos x+6\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\pi+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

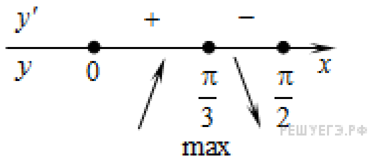
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-12\sin x+6\sqrt{3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases}-12\sin x+6\sqrt{3}=0,\\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = \dfrac{\pi}{3}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12.$$

Ответ: 12.

10. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin x + \dfrac{24}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\dfrac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 5\cos x + \dfrac{24}{\pi}$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{24}{\pi}\frac{5\pi}{6} + 6 = -16{,}5.$$

Ответ: −16,5.

11. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\mathrm{tg}x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4};\ 0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 3\mathrm{tg}^2 x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$y(0) = 3\,\mathrm{tg}\,0 - 3\cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.

21. Найдите точку максимума функции $y = (2x-3)\cos x - 2\sin x + 5$, принадлежащую промежутку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2\cos x + (3-2x)\sin x - 2\cos x = (3-2x)\sin x.$$

На заданном промежутке (первая четверть без граничных точек) синус не обращается в нуль и принимает только положительные значения. Поэтому единственный нуль производной — число 1,5.

Определим знаки производной функции: она положительна при $x < 1{,}5$ и отрицательна при $x > 1{,}5$. Поэтому искомая точка максимума — число 1,5.

Ответ: 1,5.

1. Найдите точку минимума функции $y = 7^{x^2+2x+3}$.

Решение.

Поскольку функция $y = 7^x$ возрастающая, заданная функция достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума выражение $x^2 + 2x + 3.$ Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке −1.

Ответ: −1.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$.

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2} = \sqrt{9 - (x+2)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$y = \sqrt{9 - (x+2)^2} \leq \sqrt{9} = 3.$$

Поэтому наибольшее значние функции достигается в точке −2, и оно равно 3.

Ответ: 3.

Примечание.

Приведем другое решение.

Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x = -\frac{b}{2a}.$ В нашем случае наибольшее значение достигается в точке −2 и равно 9. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ возрастает и определена в точке 9, для исходной функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ имеем: $y_{\text{нб}} = \sqrt{9} = 3.$

3. Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2.$

Решение.

Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 1. Поскольку функция $y = \log_2 x$ возрастает, и функция $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$ определена в точке 1, она также достигает в ней максимума.

Ответ: 1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

А.

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4}{4-7x}}=0,4.$

Ответ: -3

2. Найдите корни уравнения: $\cos\frac{8\pi x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

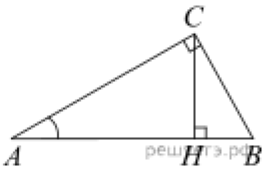
Ответ: -0,125

3. В сборнике билетов по химии всего 50 билетов, в 16 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

Ответ: 0,32

4. Фабрика выпускает сумки. В среднем 14 сумок из 130 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ: 0,89

5. 

В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, $AB=34,\ \operatorname{tg}A=4.$ Найдите *BH*.

Ответ: 32

6. Основания равнобедренной трапеции равны 28 и 15. Тангенс острого угла равен $\frac{11}{13}.$ Найдите высоту трапеции.

Ответ: 5,5

7. Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{2a+5b}{5a+2b}=1.$

Ответ: 1

8. Найдите значение выражения $\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}}\cdot\frac{16}{a^{-1}b^{-4}}.$

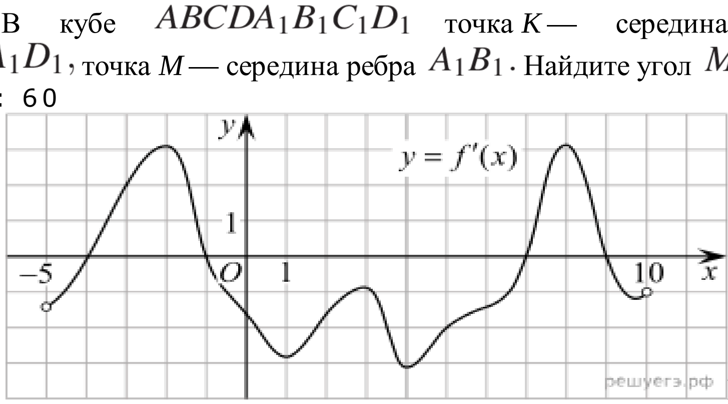
Ответ: 0,25

9. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, боковое ребро равно 12. Найдите объём пирамиды.

Ответ: 324

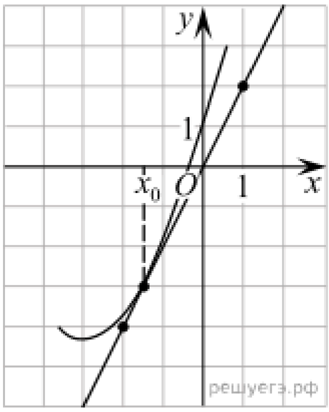
10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка *K* — середина ребра AA_1, точка *L* — середина ребра A_1D_1, точка *M* — середина ребра A_1B_1. Найдите угол MLK. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

11. 

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;10)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ: 3

12. 

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

Ответ: 2

13. Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость *v* меняется по закону $\upsilon = \upsilon_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где *t* — время с момента начала колебаний, *T* = 2 с — период колебаний, $\upsilon_0 = 1,1$ м/с. Кинетическая энергия *E* (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$, где *m* — масса груза в килограммах, *v* — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 32 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: 0,484

14. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_\text{п} = 20\ ^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние *x*, вода охлаждается от начальной температуры $T_\text{в} = 60\ ^\circ\text{C}$ до температуры $T(^\circ\text{C})$, причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_\text{в} - T_\text{п}}{T - T_\text{п}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

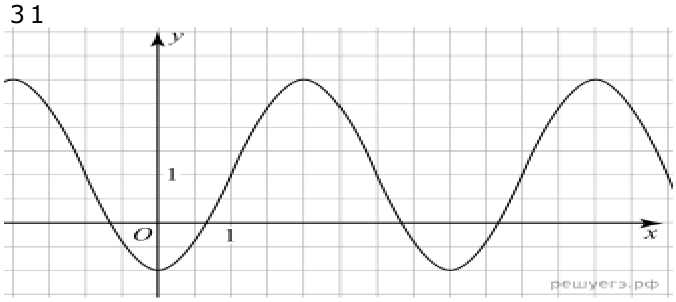
Ответ: 30

15. Ире надо подписать 880 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Ира подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за восьмой день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

Ответ: 52

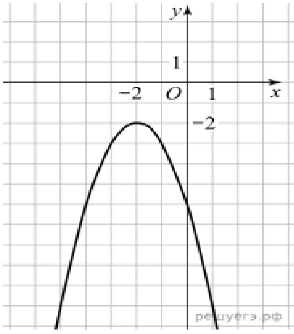
16. На изготовление 837 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 899 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: 31

17. 

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\cos\left(\frac{\pi x}{b} + c\right) + d$, где числа *a, b, c* и *d* — целые. Найдите $f\left(\frac{22}{3}\right)$.

Ответ: 0



18. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c,$ где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x) = -4$.

Ответ: 8

19. Какова вероятность того, что в случайно выбранном телефонном номере последняя цифра чётная, а предпоследняя — нечётная?

Ответ: 0,25

20. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

Ответ: 1,05

21. Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7.$

Ответ: 3

22. Найдите точку минимума функции $y = (3 - x)e^{3-x}.$

Ответ: 4

....

....

170